ریاضی عمومی ۲

کاردانی و کارشناسی

دانشکده فنی و حرفه ای و کشاورزی مراغه

دکتر امین تنهائی وش

سال تحصیلی ۹۹-۹۸

سرفصل:

فصل اول: دنباله و سری

فصل دوم: بردار و هندسه تحلیلی

فصل سوم: توابع چند متغیره

فصل چهارم: انتگرال دوگانه و سه گانه و قطبی

فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل

دنباله و سریهای نامتناهی

مقدمه و هدف کلی

در بخش ۵.۱، چندجمله‌ایهای تیلور را برای تخمین مقادیر توابع، و در نتیجه برای تخمین مقادیر اعدادی چون e، $\ln ۲$، $\sin \frac{۷\pi}{۳۶}$ و از این نوع، به کار بردیم. به عنوان مثال از عبارت

$$۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} \qquad (n \geq ۰)$$

برای تخمین عدد e استفاده شد و مشاهده کردیم که با افزایش n می‌توان مقدار تقریبی e را با هر درجه از دقت مورد نیاز محاسبه کرد. از این‌رو، در انتهای بخش ۵.۱ نیاز به مجموعهای نامتناهی را متذکر شدیم. این مجموعهای نامتناهی یا *سریها* را در این فصل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای مطالعهٔ سریهای نامتناهی، به مفهوم دنباله نیاز داریم. از این‌رو، نخست دنباله و ویژگیهای آن را مورد بحث قرار می‌دهیم و سپس به مفهوم سریها می‌پردازیم.

هدفهای دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می‌رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. همگرایی یا واگرایی دنباله‌ها را تعیین کند.
۲. دنبالهٔ مجموعهای جزئی سریها را بنویسد.
۳. آزمونهای داده شده برای تعیین همگرایی یا واگرایی سریها را به کار ببرد.
۴. مجموع برخی از سریهای همگرا را محاسبه کند.
۵. اعداد اعشاری را به صورت کسر متعارفی بنویسد.
۶. تعیین کند که یک سری همگرای مطلق، همگرای مشروط، یا واگراست.

۱.۲ دنبالهٔ نامتناهی

به طور ساده، هر فهرست مرتب (از اعداد حقیقی) مانند

$$a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n$$

یا

$$a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n, \cdots$$

را یک **دنباله** (از اعداد حقیقی) می‌نامیم. هر a_k را **عضو** یا **جملهٔ** k ام این دنباله می‌گوییم. دنبالهٔ اول را، که دارای تعدادی متناهی عضو است، یک **دنبالهٔ متناهی** می‌نامیم. سه نقطهٔ آخر دنبالهٔ دوم به این معنی است که این دنباله دارای بینهایت عضو است، چنین دنباله‌ای را یک **دنبالهٔ نامتناهی** می‌گوییم. در این متن اغلب با دنباله‌های نامتناهی سروکار داریم. به عنوان مثال

الف) دنبالهٔ مجذورات، ...,۱۶,۹,۴,۱ ؛ با $a_n = n^۲$

ب) دنبالهٔ تقریبهای اعشاری $\sqrt{۲}$ ، ۱ ،۱٫۴ ،۱٫۴۱ ،۱٫۴۱۴ ،... ، با

$$a_n = (\text{رقم اعشار } n \text{ تا } \sqrt{۲})$$

پ) دنبالهٔ، $۱, ۱\frac{۱}{۲}, ۱\frac{۵}{۶}, \ldots$؛ با $a_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n}$. پس مثلاً جملهٔ چهارم این دنباله برابر است با

$$a_۴ = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۲+۶+۴+۳}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲} = ۲\frac{۱}{۱۲}.$$

ت) دنبالهٔ، ...,۹,۵,۴,۱,۳ ؛ با

$$a_n = (\pi \text{ امین رقم بسط اعشاری } n)$$

ث) دنبالهٔ، $۱, ۱\frac{۱}{۲}, ۱\frac{۲}{۳}, \ldots$؛ با $a_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \ldots + \frac{۱}{n!}$. پس مثلا جملهٔ چهارم این دنباله برابر است با

$$a_۴ = ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!}$$
$$= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲۴} = \frac{۲۴+۱۲+۴+۱}{۲۴} = \frac{۴۱}{۲۴} = ۱\frac{۱۷}{۲۴}.$$

ج) دنبالهٔ، $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots$ ؛ با $a_n = \frac{۱}{n}$.

نمادهای اختصاری متداول برای نمایش $a_۱, a_۲, \ldots, a_n, \ldots$ عبارت‌اند از

$$(a_n)_{n=۱}^{\infty} \quad \text{یا} \quad \{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$$

که به‌طور ساده به صورت (a_n) یا $\{a_n\}$ نیز نوشته می‌شوند. در این نمایش جملهٔ nم دنباله بین دو پرانتز یا دو آکولاد قرار می‌گیرد. پس مثال (الف) را می‌توان با $(n^۲)$ و مثال (ث) را با $\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + ... + \frac{۱}{n!}\right)$ نمایش داد.

ملاحظه می‌کنیم که مفهوم دنباله بسیار کلی است؛ هر فهرست مرتب (بی‌پایان) را می‌توان به عنوان یک دنباله در نظر گرفت. لزومی ندارد که جملهٔ n م یک دنباله با «فرمول خوبی» تعریف شود، بلکه کافی است که مقادیر a_n ها مشخص باشند. ولی در این متن معمولاً a_n توسط فرمولی داده می‌شود که در این صورت a_n را **جملهٔ عمومی** دنبالهٔ (a_n) می‌گوییم. دنباله را می‌توان با استفاده از مفهوم تابع به صورت دقیقتر زیر تعریف کرد.

۱.۱.۲ تعریف

هر ***دنبالهٔ*** (نامتناهی) از اعداد حقیقی تابعی چون $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ از مجموعهٔ اعداد طبیعی به مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

اعداد متعلق به برد دنبالهٔ f را می‌توان به صورت فهرست مرتب بی‌پایان

$$f(۱), f(۲), f(۳), \cdots, f(n), \cdots$$

نوشت. ولی متداول است که، مانند اول این بخش، از نماد اندیس‌دار به جای نماد تابعی استفاده می‌کنیم و فهرست بالا را به صورت

$$f_۱, f_۲, f_۳, \cdots, f_n, \cdots$$

یا

$$a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n, \cdots$$

نمایش دهیم، که در آن به ازای هر عدد طبیعی n، $a_n = f_n = f(n)$.

گاهی دامنهٔ متغیر یک دنباله را مجموعهٔ $\mathbf{N}_۰ = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq ۰\}$ یا $\mathbf{N}_m = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq m\}$ در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال، دنبالهٔ

$$۱, ۱, \frac{۱}{۲!}, \frac{۱}{۳!}, \cdots \frac{۱}{n!}, \cdots$$

تابع $f : \mathbf{N}_۰ \to \mathbf{R}$ با تعریف $f(n) = \frac{۱}{n!}$ است که در آن $n \geq ۰$، و دنبالهٔ

$$\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۷}, \frac{۱}{۹}, \cdots, \frac{۱}{۲n+۱}, \cdots$$

تابع $\mathbf{R} \to g : \mathbf{N}_2$ با تعریف $g(n) = \frac{1}{2n+1}$ است که در آن $n \geq 2$.

۲.۱.۲ تذکر. یک دنباله را معمولاً وقتی تنها با ذکر چندجملهٔ اول آن نشان می‌دهیم که جملهٔ عمومی آن مشخص باشد. برای مثال، اگر

$$2, 4, 6, \cdots$$

داده شده باشد، آنگاه جملهٔ چهارم آن را نمی‌توان تعیین کرد مگر اطلاعات بیشتری در مورد جملهٔ عمومی این دنباله داشته باشیم. اگر، مثلاً،

$$a_n = 2n + (1-n)^3(2-n)^2(3-n)$$

آنگاه چهار جملهٔ اول دنبالهٔ (a_n) عبارت‌اند از

$$2, 4, 6, 116$$

ولی اگر $a_n = 2n$ ، آنگاه چهار جملهٔ اول دنبالهٔ (a_n) عبارت‌اند از

$$2, 4, 6, 8$$

همچنین، دنبالهٔ

$$2, 4, 6, 10, 10, 10, \cdots$$

با هر دو دنبالهٔ بالا متفاوت است.

۳.۱.۲ مثال. جملهٔ دهم دنبالهٔ (a_n) با تعریف $a_n = \frac{2-n^2}{3n+4}$ را پیدا می‌کنیم:

$$a_{10} = \frac{2-(10)^2}{3(10)+4} = \frac{2-100}{30+4} = \frac{-98}{34} = -\frac{49}{17}.$$

همگرایی دنباله‌ها

برخی از دنباله‌های نامتناهی چون (a_n) دارای این ویژگی هستند که وقتی n بی‌کران افزایش می‌یابد، جمله‌های آن به عددی چون L نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. به عبارت دیگر، تفاضل $|a_n - L|$ به‌صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به عنوان مثال، دنبالهٔ (a_n) با

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

را در نظر می‌گیریم. چندجملهٔ اول این دنباله عبارت‌اند از

$$۲-\frac{۱}{۲}, ۲+\frac{۱}{۴}, ۲-\frac{۱}{۸}, ۲+\frac{۱}{۶}, ۲-\frac{۱}{۳۲}, \cdots \quad .$$

مشاهده می‌کنیم که وقتی n افزایش می‌یابد، جمله‌های این دنباله به عدد ۲ نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. در واقع، به ازای هر عدد طبیعی n،

$$|a_n - ۲| = \left| ۲+\left(\frac{-۱}{۲}\right)^n - ۲ \right| = \left| \left(\frac{-۱}{۲}\right)^n \right| = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n = \frac{۱}{۲^n}$$

که در آن وقتی n افزایش می‌یابد، عددهای $\frac{۱}{۲^n}$ ، و در نتیجه $|a_n - ۲|$ ، به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. در این صورت می‌گوییم که حد این دنباله برابر با ۲ است و می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} \left[۲+\left(\frac{-۱}{۲}\right)^n \right] = ۲ \quad .$$

به‌طور کلی تعریف زیر را داریم:

۴.۱.۲ تعریف
عدد L را **حد دنبالهٔ** (a_n) می‌نامیم اگر متناظر با هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\text{اگر } n \geq N \text{ ، آنگاه } |a_n - L| < \varepsilon \, .$$

در این صورت می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \cdot$$

اگر چنین عدد L ، یعنی $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ وجود داشته باشد، دنبالهٔ (a_n) را **همگرا** و در غیر این‌صورت آن را **واگرا** می‌گوییم.

تعریف $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ بسیار شبیه به تعریف $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ است که در درس ریاضی عمومی ۱ بررسی کردیم. از این‌رو، بسیاری از قضیه‌های حد توابع در ∞ در مورد حد دنباله‌ها نیز صادق است. برای مثال، حد یک دنباله، در صورت وجود، یکتاست و قضیه‌های دیگر که چند

نمونه از آن‌ها را بعداً ذکر خواهیم کرد. به هر حال قضیهٔ زیر را داریم که با استفاده از تعریف حد در بینهایت به آسانی اثبات می‌شود.

۵.۱.۲ قضیه

الف) فرض کنیم (a_n) یک دنباله و f تابعی باشد به‌طوری که به ازای هر $n \geq m$، $f(n) = a_n$. اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$، آنگاه (a_n) همگراست و $\lim_{n \to \infty} a_n = L$. اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$ آنگاه (a_n) واگراست و $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$. بنابراین

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

ب) اگر $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ و g تابعی باشد که در $x = L$ پیوسته است، آنگاه

$$\lim_{n \to \infty} g(a_n) = g(L).$$

اثبات. برای اثبات قسمت اول حکم (الف)، باید نشان دهیم که متناظر با هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی N وجود دارد به‌طوری که

اگر $n \geq N$، آنگاه $|a_n - L| < \varepsilon$.

فرض می‌کنیم $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در نتیجه عددی چون N وجود دارد به‌طوری که

اگر $n \geq N$، آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$.

پس اگر $n \geq N$ آنگاه

$$|a_n - L| = |f(n) - L| < \varepsilon.$$

بنابراین $\lim_{n \to \infty} a_n = L$. اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$، به آسانی دیده می‌شود که $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$.

برای اثبات حکم (ب)، فرض می‌کنیم که $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون تابع g در L پیوسته است، پس بنا به تعریف پیوستگی، عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری که اگر $|x - L| < \delta$، آنگاه $|g(x) - f(L)| < \varepsilon$.

از طرفی، چون $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، پس عدد N وجود دارد به‌طوری که اگر $n \geq N$، آن‌گاه (با انتخاب δ به جای ε در تعریف ۴.۱.۲)

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

و در نتیجه (با انتخاب $x = a_n$)

اگر $n \geq N$، آنگاه $|g(a_n) - L| < \varepsilon$.

این مطلب به این معنی است که

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = L \cdot \qquad \square$$

بنا به این قضیه، اثبات قضیه‌های زیر با توجه به اثبات آنها برای توابع که در درس ریاضی عمومی ۱ داده شد، آسان هستند.

1

۶.۱.۲ قضیه

اگر (a_n) ، (b_n) دو دنباله باشند و $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ ، آنگاه

الف) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$.

ب) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M$.

پ) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = LM$.

ت) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$ ، مشروط بر اینکه $M \neq 0$ و به ازای هر n ، $b_n \neq 0$.

۷.۱.۲ قضیه

(۱) اگر به ازای هر n ، $a_n = c$ ، یعنی

$$(a_n) = c, c, c, \cdots, c, \cdots$$

آنگاه $\lim_{n\to\infty} c = c$.

(۲) اگر c عددی حقیقی و k عددی مثبت باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$.

۸.۱.۲ مثال. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۳n}{۷n+۳}$ را تعیین می‌کنیم:

صورت و مخرج این کسر را بر n تقسیم می‌کنیم و قضیه‌های حدی بالا را به‌کار می‌بریم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۳n}{۷n+۳} = \lim_{n\to\infty} \frac{۳}{۷+\frac{۳}{n}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} ۳}{\lim\limits_{n\to\infty} ۷ + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{۳}{n}} = \frac{۳}{۷+۰} = \frac{۳}{۷} \quad .$$

۹.۱.۲ تعریف

دنبالهٔ $(r^n) = r, r^۲, r^۳, \ldots$ را یک دنبالهٔ **هندسی** با **قدر نسبت** r می‌نامیم.

می‌توان نشان داد که دنبالهٔ هندسی (r^n) به ازای $|r| > ۱$ و $r = -۱$ واگراست، و به ازای همهٔ مقادیر دیگر r این دنباله همگراست و داریم

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } r = ۱ \\ ۰ & \text{اگر } |r| < ۱ \end{cases}$$

۱۰.۱.۲ مثال. فرض کنیم که $f(x) = \left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x$. چون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$ پس بنابر قضیهٔ ۵.۱.۲

$$\lim_{n\to\infty} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = e \cdot$$

۱۱.۱.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. حد دنبالهٔ $((-۱)^n n)$ را، در صورت وجود، بیابید.

۱۲.۱.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱-(-۱)^n}{۲}$ را تعیین کنید.

۱۳.۱.۲ مثال. همگرایی یا واگرایی دنبالهٔ $\left(n \sin\frac{\pi}{n}\right)$ را تعیین می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$. داریم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \pi \frac{\sin \pi/x}{\pi/x} = \pi \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\pi/x}{\pi/x} = \pi \cdot ۱ = \pi \cdot$$

زیرا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\pi/x}{\pi/x} = \lim_{y\to ۰} \frac{\sin y}{y} = ۱ \quad .$$

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$، پس بنا به قضیهٔ ساندویچ

$$\lim_{n\to\infty}\left[e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]=0.$$

به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}\right)=e.$$

۲۱.۱.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. با استفاده از مسألهٔ نمونه‌ای ۱۴.۵.۱ و قضیهٔ ساندویچ، نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2\quad.$$

۲۲.۱.۲ قضیه

اگر $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

اثبات. فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$، پس عدد N وجود دارد به‌طوری که

اگر $n\ge N$، آنگاه $\big|\,|a_n|-0\,\big|=\big|\,|a_n|\,\big|<\varepsilon$.

از آنجا که $\big|\,|a_n|\,\big|=|a_n|$، پس داریم

اگر $n\ge N$ آنگاه $|a_n-0|=|a_n|<\varepsilon$.

در نتیجه، بنا به تعریف حد دنباله‌ها، $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. □

۲۳.۱.۲ مثال. فرض کنیم $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty}a_n=0$:

جمله‌های این دنباله به تناوب مثبت و منفی هستند. برای مثال، پنج جملهٔ اول آن عبارت‌اند از 1، $\frac{-1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $-\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$. چون $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$، پس بنا به قضیهٔ بالا، $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

همان‌طور که متوجه شده‌اید تعیین همگرایی یا واگرایی یک دنباله با استفادهٔ مستقیم از تعریف حد دنباله‌ها کار دشواری است. خوشبختانه آزمونهای ساده‌ای برای تعیین همگرایی یا واگرایی برخی از دنباله‌ها وجود دارند. این آزمونها معمولاً همگرایی یا واگرایی دنباله‌ها را بدون محاسبهٔ حد آنها مشخص می‌کنند.

۲۴.۱.۲ تعریف

دنبالهٔ (a_n) را ***کراندار*** می‌گوییم اگر عددی چون M وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر n، $|a_n|\le M$.

۲.۲ سریهای نامتناهی

روشن است که تعدادی متناهی عدد را می‌توانیم جمع کنیم. در این بخش می‌خواهیم این عمل را به تعدادی نامتناهی عدد تعمیم دهیم. فرض کنیم بخواهیم اعداد

$$۰٫۶,\ ۰٫۰۶,\ ۰٫۰۰۶,\ ۰٫۰۰۰۶,\ \ldots,\ \frac{۶}{۱۰^{n}},\ \ldots$$

را با هم جمع کنیم. طبیعی است که مجموعهای متناهی

$$۰٫۶,\ ۰٫۶+۰٫۰۶,\ ۰٫۶+۰٫۰۶+۰٫۰۰۶,\ \ldots$$

یعنی

$$۰٫۶,\ ۰٫۶۶,\ ۰٫۶۶۶,\ \ldots$$

را در نظر بگیریم. این «مجموعهای جزئی» یک دنباله تشکیل می‌دهند. بعداً خواهیم دید که حد این دنباله برابر با $\frac{۲}{۳}$ است. از این‌رو طبیعی است که مجموع نامتناهی

$$۰٫۶+۰٫۰۶+۰٫۰۰۶+۰٫۰۰۰۶+\cdots+\frac{۶}{۱۰^{n}}+\cdots$$

را برابر با $\frac{۲}{۳}$ تعریف کنیم. به این ترتیب انگیزه‌ای برای تعریف مفاهیم زیر به دست می‌آوریم.

۱.۲.۲ تعریف

هر عبارت به صورت

$$a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}+\cdots+a_{n}+\cdots$$

را یک ***سری نامتناهی*** (یا به طور ساده یک ***سری***) می‌نامیم.

با استفاده از نماد سیگما، سری فوق را به صورتهای سادهٔ زیر نمایش می‌دهیم:

$$\sum a_n \quad \text{یا} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} a_n$$

هر یک از اعداد a_i را یک **جملهٔ** این سری نامیده و مجموعهای متناهی

$$S_{۱}=a_{۱}$$
$$S_{۲}=a_{۱}+a_{۲}$$
$$S_{۳}=a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}$$

و به‌طور کلی

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

را **مجموعهای جزئی** اول، دوم، سوم و n م سری $\sum a_n$ می‌گوییم. همچنین دنبالهٔ

$$(S_n) = S_1, S_2, S_3, \cdots S_n, \cdots$$

را **دنبالهٔ مجموعهای جزئی** سری می‌نامیم. مانند دنباله‌ها، گاهی دامنهٔ متغیر n را $\mathbf{N}_0$ یا $\mathbf{N}_m$ در نظر می‌گیریم و سریهای

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots$$

را مطرح می‌کنیم. حال به تعریف زیر توجه کنید.

۲.۲.۲ تعریف
فرض می‌کنیم $\sum a_n$ یک سری و (S_n) دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن باشد. در این صورت، اگر دنبالهٔ (S_n) همگرا باشد، یعنی $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ وجود داشته باشد، سری $\sum a_n$ را ***همگرا*** و S را ***مجموع*** آن می‌نامیم. در غیر این‌صورت سری $\sum a_n$ را ***واگرا*** می‌گوییم.

چون حد یک دنباله، در صورت وجود، یکتاست، پس مجموع یک سری همگرا نیز یکتاست.

۳.۲.۲ مثال. نشان می‌دهیم که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$: این سری به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

است. جمله‌های دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن عبارت‌اند از

$$S_0 = 1$$
$$S_1 = 1 + 1$$

$$S_{۲} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!}$$

$$S_{۳} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!}$$

و به‌طور کلی

$$S_n = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!}\cdot$$

چون بنابر مثال ۲۰.۱.۲

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!}\right) = e\cdot$$

پس، بنا به تعریف،

$$\boxed{\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e\cdot}$$

۴.۲.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. با استفاده از مسألهٔ نمونه‌ای ۲۱.۱.۲، نشان دهید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n} = \ln ۲$$

۵.۲.۲ مثال. ثابت می‌کنیم که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = \frac{۱}{۱\cdot۲} + \frac{۱}{۲\cdot۳} + \frac{۱}{۳\cdot۴} + \cdots + \frac{۱}{n(n+۱)} + \cdots$$

همگراست و مجموع آن را می‌یابیم:

می‌نویسیم

$$\frac{۱}{n(n+۱)} = \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}$$

پس مجموع جزئی nم سری داده شده برابر است با

$$S_n = \frac{۱}{۱\cdot۲} + \frac{۱}{۲\cdot۳} + \frac{۱}{۳\cdot۴} + \cdots \quad + \frac{۱}{n(n+۱)}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

که با حذف جمله‌های قرینه، داریم $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. حال، چون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-0=1 \quad .$$

پس، سری داده شده همگرا بوده و مجموع آن برابر با ۱ است، یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad .$$

۶.۲.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. به روش مثال ۵.۲.۲، ثابت کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$ همگراست و مجموع آن را تعیین کنید.

$$\left[\text{راهنمایی:}\quad \frac{2}{4n^2-1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

توجه کنید که در رابطه با هر سری $\sum a_n$ ، دو دنباله مطرح می‌شوند. یکی دنبالهٔ (a_n) حاصل از جمله‌های سری و دیگری دنبالهٔ (S_n) که از مجموعهای جزئی سری $\sum a_n$ به‌دست می‌آید. مجموع سری $\sum a_n$ را، در صورت وجود، برابر با حد دنبالهٔ دوم یعنی $\lim_{n\to\infty} S_n$ تعریف کردیم. همان‌طور که در بخش ۱.۲ متذکر شدیم، گاهی پیدا کردن این حد بسیار مشکل است ولی می‌توانیم وجود یا عدم وجود آن، و در نتیجه همگرایی یا واگرایی سری $\sum a_n$ را با استفاده از قضیه‌های مربوط به حدود دنباله‌ها تعیین کنیم. هدف ما در این فصل ارائه آزمونهایی جهت تعیین همگرایی یا واگرایی سریهاست.

۷.۲.۲ قضیه

اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

اثبات. جملهٔ n م سری $\sum a_n$ ، یعنی a_n ، را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} a_n &= (a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) \\ &= S_n - S_{n-1} \end{aligned}$$

نوشت، روشن است که اگر $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ، آنگاه $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ و در نتیجه

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-۱} = S - S = ۰ \cdot$$

□

نتیجهٔ مهم زیر بلافاصله از این قضیه به‌دست می‌آید.

۸.۲.۲ *آزمون واگرایی*
اگر $\lim_{n \to \infty} a_n \neq ۰$ ، یا وجود نداشته باشد، آنگاه سری $\sum a_n$ واگراست.

این آزمون را گاهی ***آزمون جملهٔ n* م** نیز می‌گویند. این آزمون بلافاصله نشان می‌دهد که سریهای زیر واگرا هستند.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^n \quad , \quad \sum_{n=۱}^{\infty} n \quad , \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \left(۱+\frac{۱}{n}\right) \quad , \quad \sum_{n=۱}^{\infty} ۱۲$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲n+۱} \quad , \quad \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \quad , \quad \sum_{n=۱}^{\infty} n \sin\frac{۱}{n} \cdot$$

آزمون واگرایی بیان می‌کند که تنها سریهایی ممکن است همگرا باشند که حد جملهٔ عمومی آنها ۰ باشد. ولی بیان نمی‌کند که اگر $\lim_{n \to \infty} a_n = ۰$ ، آنگاه سری $\sum a_n$ لزوماً همگراست. در واقع عکس قضیهٔ ۷.۲.۲ صحیح نیست. یعنی ممکن است $\lim_{n \to \infty} a_n = ۰$ ولی $\sum a_n$ همگرا نباشند. از این‌رو این آزمون را آزمون واگرایی نامیده‌ایم. (به‌مثال ۱۰.۲.۲ توجه کنید).

۹.۲.۲ قضیه
اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه متناظر با هر $۰ < \varepsilon$ ، عدد صحیح N وجود دارد به‌طوری که
اگر $k,l > N$ ، آنگاه $|S_k - S_l| < \varepsilon$. □

۱۰.۲.۲ مثال. ثابت می‌کنیم که سری زیر واگراست:

$$\sum \frac{۱}{n} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n} + \cdots$$

اگر $۱ < n$ ، آنگاه

$$S_{2n}-S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\quad+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

اگر سری داده شده همگرا باشد، در این صورت بنابر قضیهٔ ۹.۲.۲، به ازای $\varepsilon=\frac{1}{2}$، باید داشته باشیم $|S_{2n}-S_n|<\frac{1}{2}$. چون این نامساوی درست نیست، پس سری داده شده نمی‌تواند همگرا باشد و در نتیجه واگراست.

سری $\sum\frac{1}{n}$ را سری **همساز (یا هارمونیک)** می‌نامیم. این مثال نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ ۷.۲.۲ درست نیست، زیراگرچه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$، ولی سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست.

با وجودی که سری همساز واگراست. ولی دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن به‌کندی افزایش می‌یابد. محاسبات کامپیوتری نشان می‌دهد که مجموع حداقل ۲۷۲,۴۰۰,۶۰۰ جمله از این سری حدود ۲۰ است و تنها اگر $n\geq 15\times 10^{42}$، آنگاه $S_n\geq 100$.

سری هندسی

برخی از سریها صورت ویژه‌ای دارند که تعیین همگرایی یا واگرایی آنها بسیار آسان است. این گونه سریها کاربردهای مهمی نیز دارند.

۱۱.۲.۲ تعریف

هر سری به‌صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

راکه در آن a و r اعدادی حقیقی هستند و $a\neq 0$ ، یک **سری هندسی** می‌نامیم. a را ***جملهٔ اول*** و r را **قدر نسبت** این سری هندسی می‌گوییم.

به عنوان مثال، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}=1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{10}\right)^{n}+\cdots$$

یک سری هندسی با $a=1$ و $r=\frac{1}{10}$ است.

همان‌طور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، همگرایی یا واگرایی یک سری هندسی دقیقاً به قدرنسبت آن بستگی داد.

۱۲.۲.۲ قضیه

سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ دارای ویژگیهای زیر است.

(الف) اگر $|r|<1$، این سری همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

(ب) اگر $|r|\geq 1$، این سری واگراست. □

۱۳.۲.۲ مثال. نشان می‌دهیم که سری زیر همگراست و مجموع آن را می‌یابیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

این سری به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\cdots$$

است که یک سری هندسی با $a=1$ و $r=\frac{1}{2}$ است. پس، چون $r=\frac{1}{2}<1$، این سری همگراست و مجموع آن برابر است با

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \quad .$$

۱۴.۲.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{8}{3}$. همچنین همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n}$ را تعیین کنید.

می‌آوریم.

۲۱.۲.۲ قضیه
اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری همگرا باشند، آنگاه
(الف) $\sum(a_n+b_n)$ همگراست و $\sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
(ب) اگر c عددی حقیقی باشد، آنگاه $\sum ca_n$ همگراست و $\sum ca_n = c\sum a_n$. □

۲۲.۲.۲ مثال. نشان می‌دهیم که سری زیر همگراست و مجموع آن را می‌یابیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{2}{4n^2-1}\right).$$

بنابر قضیهٔ سریهای هندسی، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}=4\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=4\quad.$$

همچنین، بنابر مسألهٔ نمونه‌ای ۶.۲.۲،

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=1\quad.$$

روشن است که بنا به قضیهٔ قبل، اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند، آنگاه
$$\sum(a_n-b_n) = \sum a_n-\sum b_n$$
بنابراین
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{2}{4n^2-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$$
$$=4-1=3\quad.$$
البته قضیهٔ ۲۱.۲.۲ (الف) را می‌توانیم به سه یا تعدادی متناهی سری همگرا تعمیم دهیم.

۲۳.۲.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. نشان دهید که سری زیر همگراست و مجموع آن را بیابید.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-5(0/3)^n\right].$$

۲۴.۲.۲ قضیه
فرض کنیم سری $\sum a_n$ واگرا و سری $\sum b_n$ همگرا باشند. در این صورت
(الف) سری $\sum(a_n+b_n)$ واگراست.
(ب) اگر c عددی ناصفر باشد، آنگاه سری $\sum ca_n$ واگراست. □

۲۵.۲.۲ مثال. همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین می‌کنیم:

(الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$ $\qquad$ (ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n}+\frac{4}{2^n}\right)$.

(الف) چون سری همساز $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست، پس بنا به قضیهٔ ۲۴.۲.۲ (ب)، با $c = 5$، سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$ نیز واگراست.

(ب) در مثال ۲۲.۲.۲، نشان دادیم که سری هندسی $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}$ همگراست. همچنین، بنابر بند (الف) فوق، $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$ واگراست. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۲۴.۲.۲ (الف)، سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n}+\frac{4}{2^n}\right)$ واگراست.

۲۶.۲.۲ تذکر. اگر هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ واگرا باشند، آنگاه سری $\sum(a_n+b_n)$ ممکن است واگرا یا همگرا باشد. به عنوان مثال، اگر $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = \frac{1}{n}$، آنگاه $\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = \sum\frac{2}{n}$ واگراست. در حالی که اگر $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = -\frac{1}{n}$، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = \sum 0 = 0$$

همگراست.

این بخش را در اینجا به پایان می‌رسانیم و آزمونهای دیگر همگرایی یا واگرایی سریها را در بخشهای بعدی پی می‌گیریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ۵(۰٫۳)^n = \frac{۱۵/۱۰}{۱-۳/۱۰} = \frac{۱۵}{۷}.$$

در نتیجه، سری داده شده همگراست و مجموع آن برابر است با

$$S = e + \ln ۲ - \frac{۱۵}{۷}.$$

۳.۲ سریهای با جملات نامنفی

تاکنون برای تعیین همگرایی یک سری، مجموع آن یعنی $\lim_{n\to\infty} S_n$ را پیدا می‌کردیم. ولی همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، برای بسیاری از سریها، حتی سریهای ساده‌ای چون $\sum \frac{۱}{n^۲}$ و $\sum \frac{۱}{n^۳}$، پیدا کردن مجموع آنها بسیار مشکل یا غیرممکن است، زیرا در اغلب موارد فرمول فشرده و ساده‌ای برای S_n به دست نمی‌آید. در نتیجه آزمونهایی که همگرایی یک سری $\sum a_n$ را با استفاده از a_n تعیین می‌کنند اهمیت ویژه‌ای دارند. در این بخش صرفاً سریهایی را در نظر می‌گیریم که جمله‌های آنها نامنفی هستند. آزمونهای مهمی در رابطه با همگرایی یا واگرایی این نوع سریها وجود دارند که تعدادی از آنها را ارائه می‌دهیم.

نخست به این مطلب توجه می‌کنیم که اگر $\sum a_n$ یک سری با جمله‌های نامنفی باشد، آنگاه دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن یعنی (S_n) یک دنبالهٔ یکنوا (ناکاهشی) است. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۲۷.۱.۲، اگر دنبالهٔ (S_n) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} S_n$ وجود دارد و در نتیجه $\sum a_n$ همگراست. در غیر این‌صورت، یعنی اگر (S_n) کراندار نباشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۲۵.۱.۲ (ب)، $\lim_{n\to\infty} S_n$ وجود ندارد و لذا $\sum a_n$ واگراست. این مطالب را در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

۱.۳.۲ قضیه

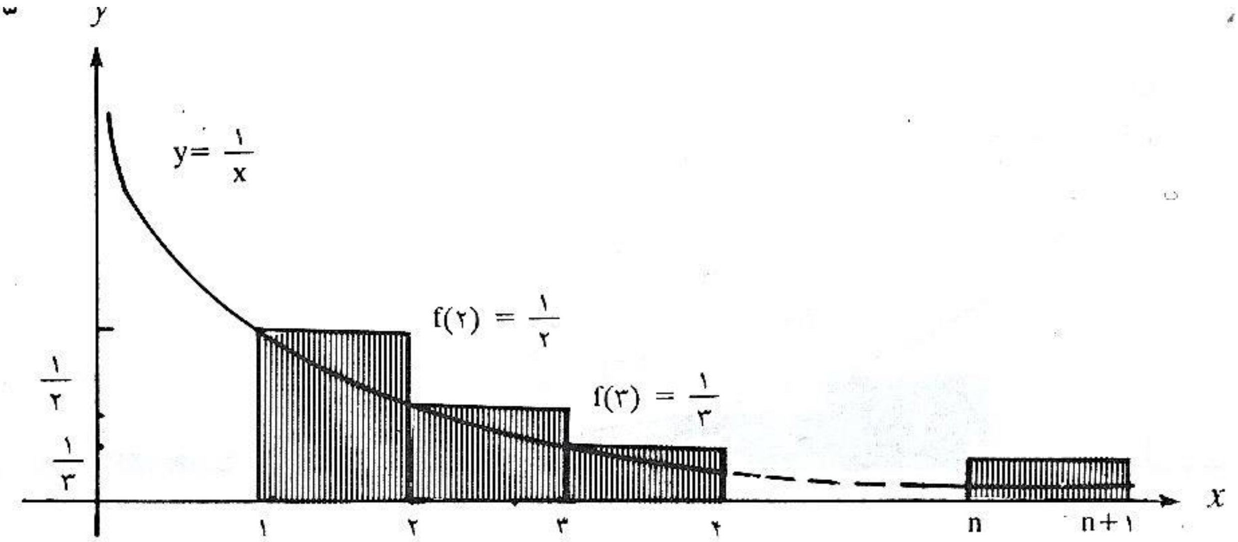
فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات نامنفی و S_n مجموع جزئی n م آن باشد. در این صورت $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر دنبالهٔ (S_n) کراندار باشد. □

آزمون انتگرال

در این آزمون برای تعیین همگرایی یا واگرایی یک سری آن را با یک انتگرال ناسره مقایسه می‌کنیم. نخست به دو مثال زیر توجه می‌کنیم.

۲.۳.۲ مثال. در اینجا به روشی متفاوت با روش مثال ۱۰.۲.۲، ثابت می‌کنیم که سری (همساز) $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست. از این روش برای اثبات آزمون انتگرال استفاده می‌شود.

تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را به ازای $x \geq ۱$ در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار



مجموع مساحتهای مستطیلهای سایه زده عبارت است از

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}=S_n$$

که برابر با مجموع جزئی n م سری $\sum \frac{۱}{n}$ است. روشن است که مساحت زیر نمودار تابع f از ۱ تا $n+۱$ کوچکتر از مجموع مساحتهای این مستطیلها است. پس

$$\int_{۱}^{n+۱}\frac{۱}{x}\,dx\le ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}=S_n$$

با محاسبهٔ این انتگرال، داریم

$$\ln(n+۱)\le ۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}=S_n\cdot$$

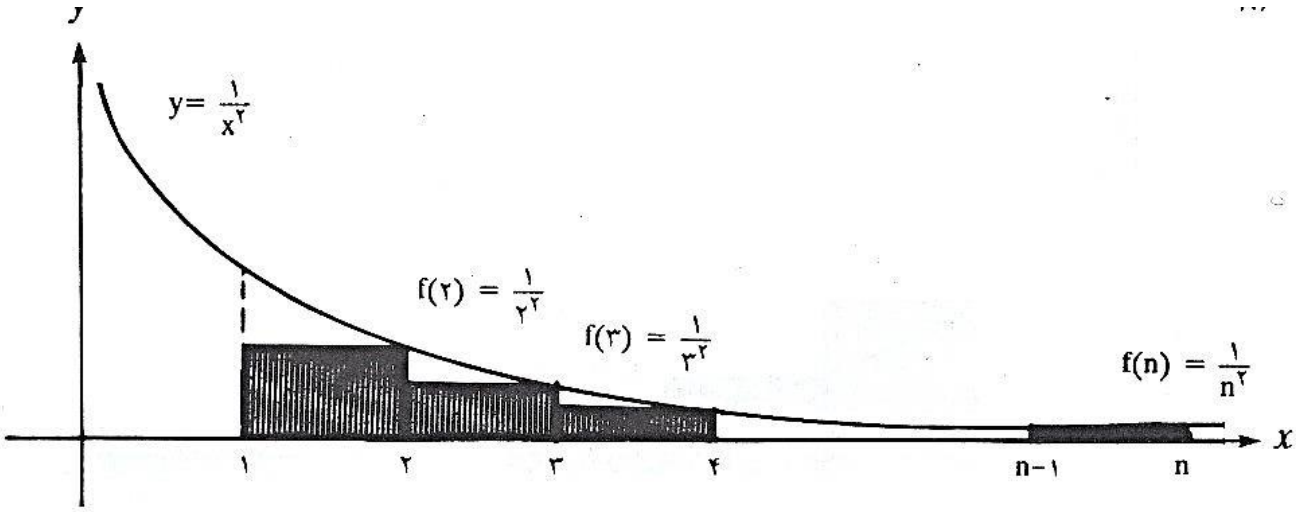
چون $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+۱)=\infty$ ،پس (S_n) کراندار نیست و در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۳.۲، سری همساز واگراست.

۳.۳.۲ مثال. نشان می‌دهیم که سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$ همگراست:

در مثال ۲۹.۱.۲ ، نشان دادیم که دنبالهٔ

$$(S_n)=\left(۱+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{n^{۲}}\right)$$

و در نتیجه سری $\sum \frac{۱}{n^{۲}}$ ، همگراست. در اینجا این مسأله را به روش مثال قبل حل می‌کنیم. نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ را به ازای $x\ge ۱$ در نظر می‌گیریم.



با مقایسهٔ مساحت زیر نمودار f از ۱ تا n با مجموع مساحتهای مستطیلهای سایه‌زده داریم

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx=1-\frac{1}{n}<1 \quad .$$

پس، به ازای هر n داریم

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2 \quad .$$

در نتیجه‌دنبالهٔ یکنوای (S_n) کراندار است و بنابراین بنا به قضیهٔ ۱.۳.۲، سری $\sum a_n$ همگراست.
حال حالت کلی دو مثال قبل را در آزمون زیر می‌آوریم.

۴.۳.۲ آزمون انتگرال

فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری و f یک تابع باشد که به ازای $x \geq 1$ نامنفی، پیوسته و کاهشی است و به ازای $n \geq 1$، $f(n)=a_n$. در این صورت

(الف) $\sum a_n$ همگراست اگر انتگرال ناسرهٔ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد، و

(ب) $\sum a_n$ واگراست اگر $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد. □

۵.۳.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. با استفاده از آزمون انتگرال نشان دهید که سری زیر واگراست:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

۶.۳.۲ مثال. با استفاده از آزمون انتگرال، همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ را تعیین می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $f(x)=xe^{-x^2}$. در این صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}=\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

اگر $x \geq 1$ ، آنگاه $f(x)$ مثبت و پیوسته است، و چون

$$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}(1-2x^2)<0$$

پس f کاهشی نیز هست. چون

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t xe^{-x^2}dx$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-x^2}\Big|_1^t$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{t^2}}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}.$$

پس، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده همگراست.

۷.۳.۲ مسألهٔ نمونه‌ای. با استفاده از آزمون انتگرال، همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ را تعیین کنید.

فرض کنیم $p>0$ عددی حقیقی باشد. در این صورت سری

$$\sum\frac{1}{n^p}$$

را یک **سری p** می‌گوییم. با استفاده از آزمون انتگرال، آزمون سادهٔ زیر برای سریهای p به‌دست می‌آید.

۸.۳.۲ قضیه

سری $\sum\frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $p>1$ و واگراست اگر $p\leq 1$. □

بنابر قضیهٔ فوق، به آسانی دیده می‌شود که سریهای $\sum \frac{1}{n^2}$ و $\sum \frac{1}{n^3}$ همگرا هستند در حالی که $\sum \frac{1}{n^{1/2}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست. توجه کنید که این قضیه تنها همگرایی سریهای p با $p>1$ را تعیین می‌کند و مجموع آنها را به دست نمی‌دهد.

از آنجا که حذف چندجملهٔ اول یک سری اثری در همگرایی یا واگرایی آن ندارد، پس آزمون انتگرال را روی بازه‌های $[m,\infty)$، $m \geq 1$، نیز می‌توان به‌کار برد. از این‌رو سریهای $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ به ترتیب همگرا و واگرا هستند.

آزمون مقایسه

در این آزمون دو سری را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

۹.۳.۲ آزمون مقایسه

فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با جملات نامنفی باشند. در این صورت

(الف) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد و به ازای هر $n \geq 1$، $a_n \leq b_n$، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست و $\sum a_n \leq \sum b_n$.

(ب) اگر $\sum b_n$ واگرا باشد و به ازای هر $n \geq 1$، $b_n \leq a_n$، آنگاه $\sum a_n$ نیز واگراست. □

۱۰.۳.۲ مثال. همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را بررسی می‌کنیم.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ (ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

(الف) به ازای هر $n \geq 1$، داریم

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}.$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ یک سری هندسی با $r = \frac{1}{2} < 1$ و همگراست، در نتیجه بنابر آزمون مقایسه، سری داده شده نیز همگراست.

بردار و هندسهٔ تحلیلی

مقدمه و هدف کلی

بسیاری از کمیتهای فیزیکی و یا مجرد تنها دارای «اندازه» هستند. هر یک از این کمیتها را می‌توان تنها توسط یک عدد حقیقی مشخص کرد. به عنوان مثال، طول، مساحت، حجم، قیمت، سود، زیان، جرم، درجهٔ حرارت، کمیتهایی از این نوع هستند. این کمیتها را ***اسکالر*** می‌نامیم. پدیده‌های دیگری هم هستند که تنها با یک عدد مشخص نمی‌شوند. برای مشخص کردن این پدیده‌ها، علاوه بر اندازه، جهتشان نیز مورد نیاز است. این پدیده‌ها ***کمیتهای برداری*** نامیده می‌شوند. مأنوسترین مثالهای بردار، **سرعت** یک جسم متحرک و ***نیروی*** وارد بر یک جسم هستند. در این فصل بردارهای مسطحه و فضایی و برخی از کاربردهای آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مفهوم مجرد و کلیتر بردار را در فصل ۵ معرفی می‌کنیم.

هدفهای دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می‌رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. اعمال جمع و مضرب اسکالر را روی بردارها انجام دهد.

۲. حاصلضرب عددی و برداری دو بردار را محاسبه کند.

۳. ضربهای عددی و برداری را برای محاسبهٔ زاویهٔ بین دو بردار به‌کار ببرد.

۴. اندازهٔ بردارها را محاسبه کند.

۵. زاویه‌های هادی یک بردار را تعیین کند.

۶. ویژگیهای ضربهای عددی و برداری را بیان کند.

۷. رابطه‌های بین ضرب عددی و ضرب برداری را بیان کند.

۸. معادله‌های پارامتری و دکارتی (متقارن) خط در فضا را بنویسد و بتواند آنها را به یکدیگر تبدیل کند.

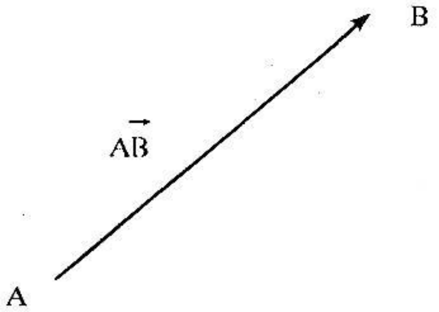
۹. معادلهٔ صفحه را بنویسد.

۱۰. فاصلهٔ نقاط را از خط و از صفحه محاسبه کند.

۱۱. محل تلاقی دو خط، یک خط با یک صفحه، و دو صفحه را بیابد.

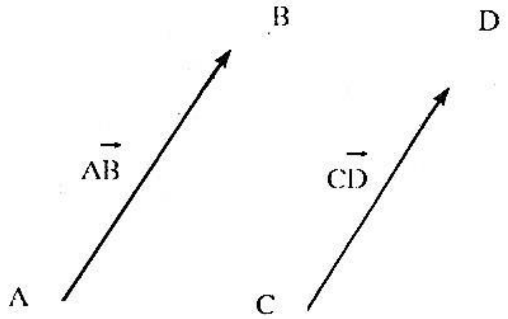
۱.۴ بردار در صفحه

یک **بردار** به‌طور هندسی پاره خطی جهت‌دار است. (شکل ۱.۱.۴ را ببینید)



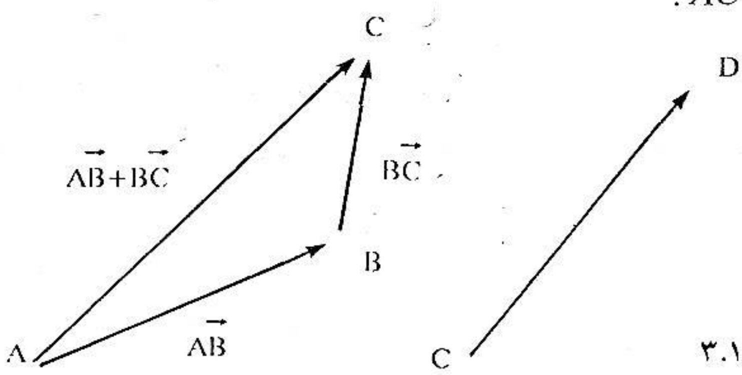
شکل ۱.۱.۴

این بردار را با $\overrightarrow{AB}$ نمایش می‌دهیم. نقطهٔ A را **مبدأ** و نقطهٔ B را **انتهای بردار** B می‌نامیم. طول پاره‌خط AB را اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم و آن را با $|\overrightarrow{AB}|$ نمایش می‌دهیم. جهت پاره‌خط AB را **جهت** یا **سوی** بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم. دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را **برابر** (یا **همسنگ**) می‌گوییم و می‌نویسیم $AB = CD$ اگر اندازه و جهت آنها یکی باشد. (شکل ۲.۱.۴ را ببینید).



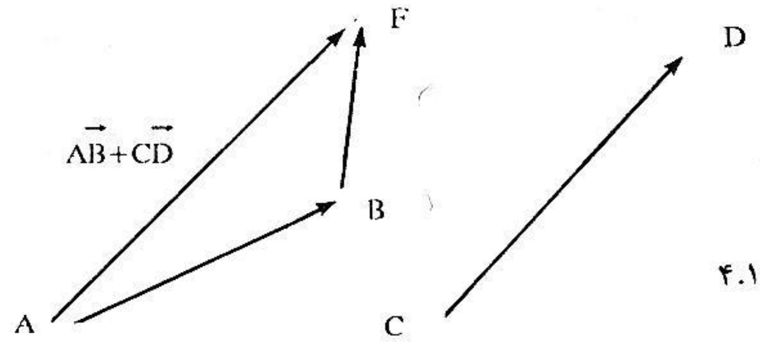
شکل ۲.۱.۴

اگر جسمی از نقطهٔ A روی یک خط راست به نقطهٔ B روی این خط تغییر مکان دهد، این تغییر مکان را می‌توانیم توسط بردار $\overrightarrow{AB}$ مشخص کنیم. اگر $\overrightarrow{AB}$ معرف تغییر مکان جسمی از نقطهٔ A به نقطهٔ B و $\overrightarrow{BC}$ معرف تغییر مکان این جسم از B به نقطهٔ C باشد، آنگاه بردار $\overrightarrow{AC}$ معرف ترکیب این دو تغییر مکان، یعنی تغییر مکان از A به C ، است (شکل ۳.۱.۴ را ببینید). بردار $\overrightarrow{AC}$ را **مجموع** دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ می‌نامیم، و می‌نویسیم $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



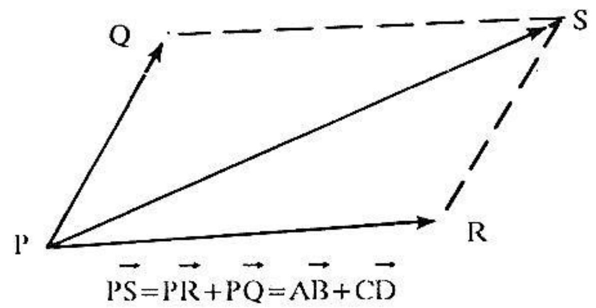
شکل ۳.۱.۴

با توجه به تعریف تساوی بردارها، هر دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را که دارای یک مبدأ نباشند نیز می‌توانیم با هم جمع کنیم. برای این‌کار، بردار $\overrightarrow{BF}$ را مساوی با بردار $\overrightarrow{CD}$ رسم می‌کنیم. در این صورت $\overrightarrow{AF}$ **مجموع دو بردار** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ است. (شکل ۴.۱.۴ را ببینید).



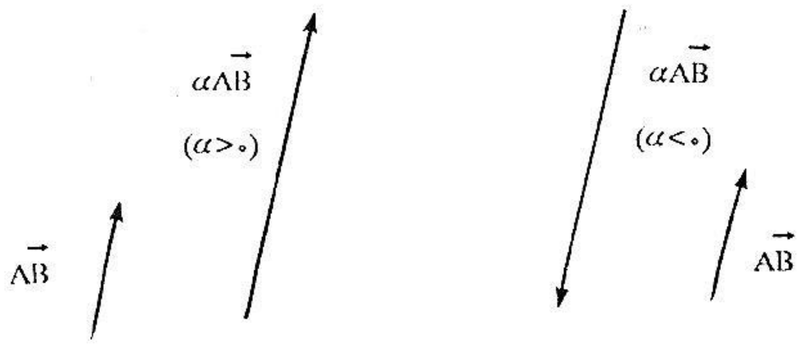
شکل ۴.۱.۴

روش دیگر پیدا کردن مجموع دو بردار هندسی این است که دو بردار هم مبدأ مساوی با بردارهای داده شده رسم کنیم. در این صورت قطر متوازی‌الاضلاع حاصل از این دو بردار برابر با مجموع دو بردار داده شده است. (شکل ۵.۱.۴ را ببینید)



شکل ۵.۱.۴

اگر α یک عدد حقیقی و $\overrightarrow{AB}$ یک بردار هندسی باشد، آنگاه ***مضرب اسکالر*** $\alpha\overrightarrow{AB}$ برداری است با اندازهٔ $|\alpha||\overrightarrow{AB}|$ و جهت آن در جهت $\overrightarrow{AB}$ است اگر $\alpha > 0$ و در خلاف جهت $\overrightarrow{AB}$ است اگر $\alpha < 0$ (شکل ۶.۱.۴ را ببینید). روشن است که اگر $\alpha = 0$ آنگاه $\alpha\overrightarrow{AB}$ بردار صفر، یعنی برداری با اندازهٔ ۰ است.



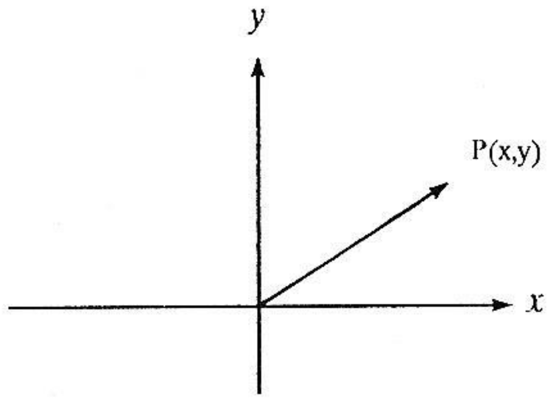
شکل ۶.۱.۴

اگر همهٔ بردارهای هندسی مورد بحث در یک صفحهٔ مختصات قرار داشته باشند، آنگاه مبدأ و انتهای هر بردار توسط مختصاتشان مشخص می‌شوند. در این صورت احکام

هندسی مربوط به بردارها را می‌توان به احکام جبری تبدیل کرد و آنها را به‌طور جبری مورد مطالعه قرار داد. یک برتری مطالعهٔ جبری بردارها بر مطالعهٔ هندسی آنها این است که اثبات قضیه‌ها بسیار آسانتر می‌شوند. مزیت دیگر روش جبری این است که این نظریه به آسانی به بردارهای در فضای سه بعدی و یا با بعد بالاتر قابل تعمیم است. در روش جبری، با توجه به تعریف تساوی دو بردار هندسی، مبدأ بردارها را در مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. در این صورت هر بردار را توسط مختصات نقطهٔ انتهایی آن مشخص می‌کنیم. بنابراین تعریف زیر را داریم.

۱.۱.۴ تعریف
هر **بردار** (جبری) در صفحهٔ مختصات یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی است. x و y را **مؤلفه‌های** بردار (x,y) می‌نامیم.

روشن است که متناظر با هر نقطهٔ $P(x,y)$ در صفحهٔ مختصات یک بردار (هندسی) $\overrightarrow{OP}$ وجود دارد. این بردار را **بردار موضع** یا **بردار مکانی** نقطهٔ P می‌نامیم. (شکل ۷.۱.۴ را ببینید).



شکل ۷.۱.۴

فرض کنیم $\vec{a} = (a_1,a_2)$ بردار مکانی نقطهٔ $A(a_1,a_2)$ باشد، به‌آسانی دیده می‌شود که هر بردار $\overrightarrow{PQ}$ که در آن $P(x,y)$ و $Q(x+a_1,y+a_2)$ به‌ترتیب مبدأ و انتهای آن هستند با بردار $\vec{a}$ مساوی است.

۲.۱.۴ مثال فرض کنیم $P(x_1,y_1)$ و $Q(x_2,y_2)$ دو نقطه باشند. بردار $\vec{a} = (a_1,a_2)$ نمایشگر بردار $\overrightarrow{PQ}$ را تعیین می‌کنیم:

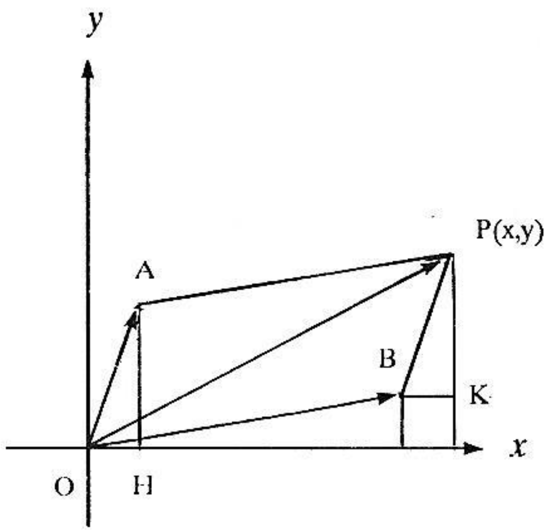
با توجه به مطالب فوق، داریم $x_2=x_1+a_1$ و $y_2=y_1+a_2$. پس $a_1=x_2-x_1$ و یعنی $a_2=y_2-y_1$

$$\vec{a}=(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱)\cdot$$

۳.۱.۴ مثال. فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲)$ دو بردار باشند. با توجه به تعریف جمع بردارهای هندسی، نشان می‌دهیم که

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲)}$$

با توجه به تعریف جمع بردارهای هندسی، $\vec{a}+\vec{b}=\vec{OP}$.



شکل ۸.۱.۴

تساوی دو مثلث OAH و BPK نشان می‌دهد که $BK=OH=a_۱$. در نتیجه $x=a_۱+b_۱$.
به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $y=a_۲+b_۲$.

۴.۱.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و α یک عدد حقیقی باشد. با استفاده از مضرب اسکالر بردارهای هندسی، نشان دهید که

$$\boxed{\alpha\vec{a}=(\alpha a_۱,\alpha a_۲)\cdot}$$

چند خاصیت مهم جمع و مضرب اسکالر بردارها را در دو قضیهٔ زیر می‌آوریم.

۵.۱.۴ قضیه
فرض کنیم V مجموعهٔ بردارهای واقع بر یک صفحه باشد. جمع برداری روی مجموعهٔ V دارای ویژگیهای زیر است: به ازای هر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم

(الف) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(ب) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

(پ) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$، که در آن $\vec{0}=(0,0)$.

(ت) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

اثبات. بسیار آسان است. به عنوان نمونه (الف) را ثابت می‌کنیم:
فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2)$ ، $\vec{b}=(b_1,b_2)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2)$. در این صورت

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

$$=(b_1+a_1,b_2+a_2)$$

$$=(b_1,b_2)+(a_1,a_2)$$

$$=\vec{b}+\vec{a}\ .$$

۶.۱.۴ قضیه
اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در V و α و β دو اسکالر باشند، آنگاه

(الف) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

(ب) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

(پ) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$.

(ت) $1\vec{a}=\vec{a}$.

(ث) $0\vec{a}=\vec{0}=\alpha\vec{0}$.

اثبات. این احکام نیز مانند احکام قضیهٔ فوق اثبات می‌شوند. برای نمونهٔ (الف) را ثابت

می‌کنیم و اثبات احکام دیگر را به شما واگذار می‌کنیم. فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$ در این صورت

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha[(a_1,a_2)+(b_1,b_2)]$$

$$=\alpha(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

$$=(\alpha a_1+\alpha b_1,\alpha a_2+\alpha b_2)$$

$$=(\alpha a_1,\alpha a_2)+(\alpha b_1,\alpha b_2)$$

$$=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}\ .$$

۷.۱.۴ تعریف

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در V باشند آنگاه ***تفاضل*** $\vec{a}-\vec{b}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

روشن است که اگر $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$، آنگاه

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2)+(-b_1,-b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$

۸.۱.۴ قضیه

اندازهٔ بردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ برابر است با $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

اثبات. بنا به فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه و تعریف اندازهٔ بردار $\vec{a}$، داریم

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1-0)^2+(a_2-0)^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\ .$$

۹.۱.۴ مثال. فرض کنیم $P(x_1,y_1)$ و $Q(x_2,y_2)$ دو نقطه باشند. اندازهٔ بردار $\vec{PQ}$ را تعیین می‌کنیم:

روشن است که اندازهٔ بردار $\vec{PQ}$ با اندازهٔ «بردار نمایشگر» آن از مبدأ یعنی

(x_2-x_1, y_2-y_1) برابر است. پس

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,\cdot$$

دو بردار خاص $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{j}=(0,1) \quad , \quad \vec{i}=(1,0)\cdot$$

با توجه به قضیهٔ ۸.۱.۴، روشن است که اندازهٔ این بردارها برابر است با $1 = |\vec{j}| = |\vec{i}|$. یعنی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ دو **بردار واحد** هستند. با استفاده از جمع و مضرب اسکالر بردارها، هر بردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی از بردارهای واحد i و j نوشت. در واقع، می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1,a_2)=(a_1,0)+(0,a_2)\\ &= a_1(1,0)+a_2(0,1)\\ &= a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\end{aligned}$$

عبارت طرف راست تساوی فوق را یک **ترکیب خطی** از $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌نامیم. با توجه به این نمادگذاری، اعمال‌جمع، تفریق، مضرب‌اسکالر و اندازهٔ بردارها به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}$$

$$(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})-(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}$$

$$\alpha(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})=(\alpha a_1)\vec{i}+(\alpha a_2)\vec{j}$$

$$|a_1\vec{i}+a_2\vec{j}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\cdot$$

۱۰.۱.۴ تعریف

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را **موازی** می‌گوییم اگر اسکالر α وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\vec{b}=\alpha\vec{a}$$

۱۱.۱.۴ مثال. نشان می‌دهیم که دو بردار $\vec{a} = ۶\vec{i}+۲\vec{j}$ و $\vec{b}=۳\vec{i}+\vec{j}$ موازی هستند:
چون

$$\vec{b} = ۳\vec{i} + \vec{j} = \frac{۱}{۲}(۶\vec{i} + ۲\vec{j}) = \frac{۱}{۲}\vec{a}$$

پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند.

۱۲.۱.۴ قضیه
اگر $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد، آنگاه $\vec{u} = \frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$ بردار واحد همجهت با $\vec{a}$ است.

اثبات. روشن است که اگر α اسکالر باشد و $\vec{a} = (a_۱, a_۲)$ آنگاه

$$|\alpha\vec{a}| = \sqrt{(\alpha a_۱)^۲ + (\alpha a_۲)^۲} = \sqrt{\alpha^۲(a_۱^۲ + a_۲^۲)} = |\alpha|\sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲} = |\alpha||\vec{a}|$$

پس

$$|\vec{u}| = \frac{۱}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = ۱$$

همچنین چون $\frac{۱}{|\vec{a}|} > ۰$ ، پس $\vec{u}$ همجهت با $\vec{a}$ است.□

۱۳.۱.۴ مثال بردار واحد همجهت با بردار $۴\vec{i}-\vec{j}$ را پیدا می‌کنیم:
چون

$$|۴\vec{i} - \vec{j}| = \sqrt{۱۶+۱} = \sqrt{۱۷}$$

پس بردار واحد مورد نظر برابر است با

$$\vec{u} = \frac{۱}{\sqrt{۱۷}}(۴\vec{i} - \vec{j})$$

$$= \frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\vec{i} - \frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\vec{j}.$$

۱۴.۱.۴ تذکر. به‌آسانی می‌توان مفهوم بردار در صفحه را به بردار در فضا تعمیم داد. در واقع هر سه‌تایی مرتب (x,y,z) را یک بردار در فضا می‌نامیم. در این صورت اگر بردارهای واحد $\vec{i}$، $\vec{j}$، $\vec{k}$ عبارت باشند از

$$\vec{k}=(0,0,1) \qquad \vec{j}=(0,1,0) \qquad \vec{i}=(1,0,0)$$

آنگاه هر بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ را می‌توان به‌صورت

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

نیز نمایش داد. جمع، مضرب اسکالر و اندازهٔ بردارهای فضایی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

$$c(a_1,a_2,a_3)=(ca_1,ca_2,ca_3)$$

$$|(a_1,a_2,a_3)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

تعمیم مفاهیم دیگر به بردارهای فضایی به همین ترتیب انجام می‌شود.

۱۵.۱.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $P(3,0,2)$، $Q(1,-1,5)$ ، $R(5,1,-1)$ سه نقطه در فضا باشند. نشان دهید که $|\vec{PQ}|=|\vec{PR}|$.

تمرین ۱.۴

در تمرینهای زیر، $4\vec{a}+5\vec{b}$ و $4\vec{a}-5\vec{b}$ را بیابید.

۱. $\vec{a}=(2,-3)$ ، $\vec{b}=(1,4)$.

۲. $\vec{a}=(1,2,1)$ ، $\vec{b}=(0,1,\sqrt{2})$.

۳. $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}$ ، $\vec{b}=3\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}$.

۴. $\vec{a}=8\vec{i}+\vec{j}$ ، $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{k}$.

در تمرینهای زیر بردار نمایشگر $\vec{PQ}$ و اندازهٔ آن را تعیین کنید.

۵. $P(1,-4)$ ، $Q(5,0)$.

۶. $P(1,2,0)$ ، $Q(-1,1,-2)$.

در تمرینهای ۷ و ۸ بردار واحد همجهت با بردار داده شده را تعیین کنید.

۷. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

۸. $\vec{b} = ۷\vec{i} + ۱۲\sqrt{۲}\vec{j} - ۱۲\sqrt{۲}\vec{k}$

۹. فرض کنید $\vec{a}$ بردار ناصفری در صفحهٔ مختصات و θ زاویه بین محور x و بردار $\vec{a}$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد. نشان دهید که

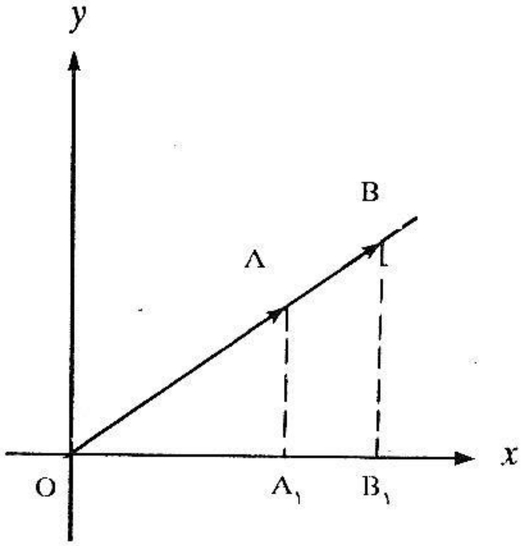
$$\vec{a} = |\vec{a}|(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})\cdot$$

۱۰. فرض کنید $\vec{u}$ یک بردار واحد در صفحه باشد. با استفاده از تمرین ۹ نشان دهید که به ازای عددی چون θ ،

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

حل مسأله‌های نمونه‌ای ۱.۴

۴.۱.۴ فرض کنید $\vec{OA} = \vec{a}$ و $\vec{OB} = \alpha\vec{a}$. پس $|\vec{OB}| = |\alpha||\vec{OA}|$. فرض کنیم $\alpha > ۰$. بنابر تشابه دو مثلث $OAA_۱$ و $OBB_۱$ در شکل ۹.۱.۴



شکل ۹.۱.۴

داریم

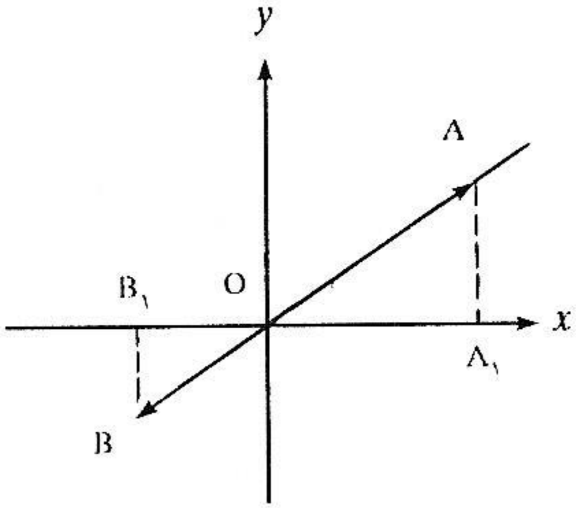
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB_۱}{OA_۱}$$

پس

$$\alpha = \frac{|\vec{OB}|}{|\vec{OA}|} = \frac{OB_۱}{a_۱}$$

در نتیجه $OB_۱ = \alpha a_۱$. به همین ترتیب مؤلفهٔ دوم نقطهٔ B برابر با $\alpha a_۲$ به‌دست می‌آید. این

مطلب نشان می‌دهد که برای $\circ < \alpha$، $\alpha\vec{a}=(\alpha a_۱,\alpha a_۲)$. حالت $\circ > \alpha$ نیز به همین صورت و با استفاده از شکل ۱۰.۱.۴ اثبات می‌شود.



شکل ۱۰.۱.۴

۱۵.۱.۴ داریم

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(۱-۳)^۲+(-۱-\circ)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۹}=\sqrt{۱۴}$$

$$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(۵-۳)^۲+(۱-\circ)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۹}=\sqrt{۱۴}$$

و در نتیجه $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}|$.

۲.۴ ضرب عددی

حال که جمع، تفریق و مضرب اسکالر بردارها را تعریف کردیم، طبیعی است که بپرسیم آیا می‌توان ضرب مناسبی برای دو بردار تعریف کرد. گرچه ضرب مؤلفه‌ای دو بردار، یعنی

$$(a_۱,a_۲,a_۳)(b_۱,b_۲,b_۳)=(a_۱b_۱,a_۲b_۲,a_۳b_۳)$$

طبیعی به‌نظر می‌رسد، ولی تقریباً فاقد کاربرد فیزیکی است. دو نوع ضرب بردارها، به نامهای **ضرب عددی** و **ضرب برداری**، دارای کاربردهای فیزیکی و ریاضی بسیاری هستند. در این بخش ضرب عددی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۲.۴ تعریف

فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. ***حاصلضرب عددی، داخلی*** یا ***نقطه‌ای*** $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

لازم به تذکر است که حاصلضرب عددی دو بردار، بر خلاف مجموع، تفاضل و مضرب اسکالر بردارها، یک عدد است و بردار نیست. به عنوان مثال،

$$(۳,۱,۰)\cdot(۱,-۱,۲)=(۳)(۱)+(۱)(-۱)+(۰)(۲)$$

$$=۳-۱+۰=۲$$

$$(۲\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k})\cdot(۴\vec{i}+۳\vec{j}-۲\vec{k})=(۲)(۴)+(-۱)(۳)+(۳)(-۳)$$

$$=۸-۳-۶=-۱ \quad .$$

۲.۲.۴ مسألۀ نمونه‌ای. نشان دهید که

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=۱ \quad , \quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=۰$$

برخی از ویژگیهای ضرب عددی دو بردار را در قضیۀ زیر می‌آوریم.

۳.۲.۴ قضیه

فرض کنیم $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و α یک اسکالر باشد. در این صورت

(الف) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^{۲}$

(ب) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(پ) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(ت) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ث) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$

(ج) $\vec{۰}.\vec{a}=۰$

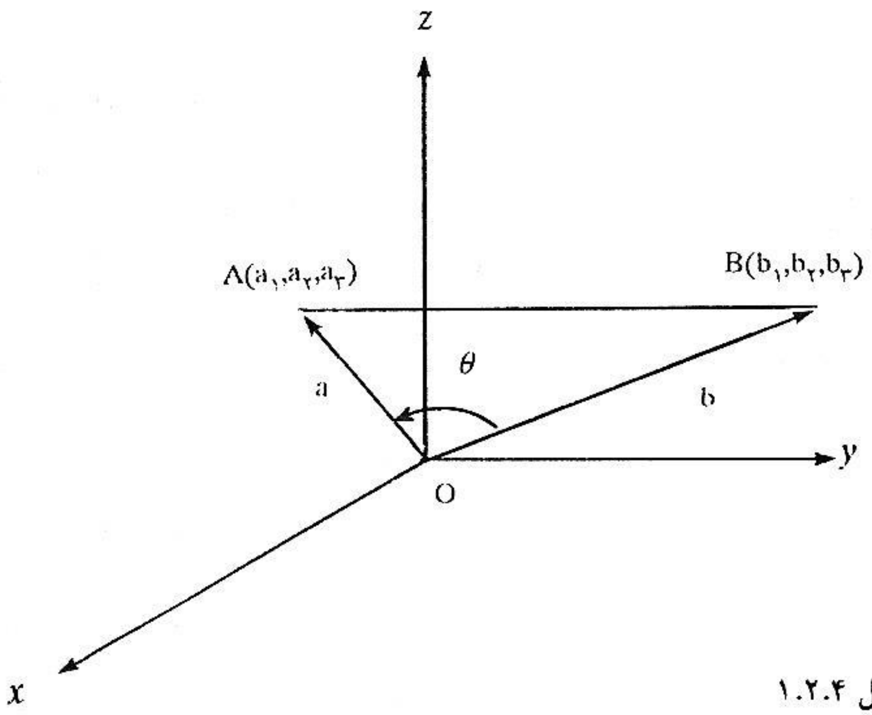
اثبات. این احکام به آسانی و با استفادۀ مستقیم از تعریف و ویژگیهای اعداد حقیقی ثابت می‌شوند. برای نمونه (پ) را ثابت می‌کنیم و اثبات احکام دیگر را به شما واگذار می‌کنیم. فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ ، $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $\vec{c}=(c_۱,c_۲,c_۳)$. در این صورت

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(a_۱,a_۲,a_۳)\cdot(b_۱+c_۱,b_۲+c_۲,b_۳+c_۳)$$
$$=a_۱(b_۱+c_۱)+a_۲(b_۲+c_۲)+a_۳(b_۳+c_۳)$$

$$=(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} \;.$$

در قضیهٔ زیر رابطهٔ بین ضرب عددی و زاویهٔ بین دو بردار را بیان می‌کنیم. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر و $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ بردارهای نمایشگر آنها باشند، آنگاه زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را کوچکترین **زاویه بین** دو پاره خط $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ تعریف می‌کنیم. اگر اندازهٔ این زاویه θ باشد، روشن است که $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ دو ضلع آن هستند. (شکل ۱.۲.۴ را ببینید).



شکل ۱.۲.۴

۴.۲.۴ قضیه

اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشند، آنگاه

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\theta \;.$$

۵.۲.۴ نتیجه

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود بر هم هستند اگر و فقط اگر

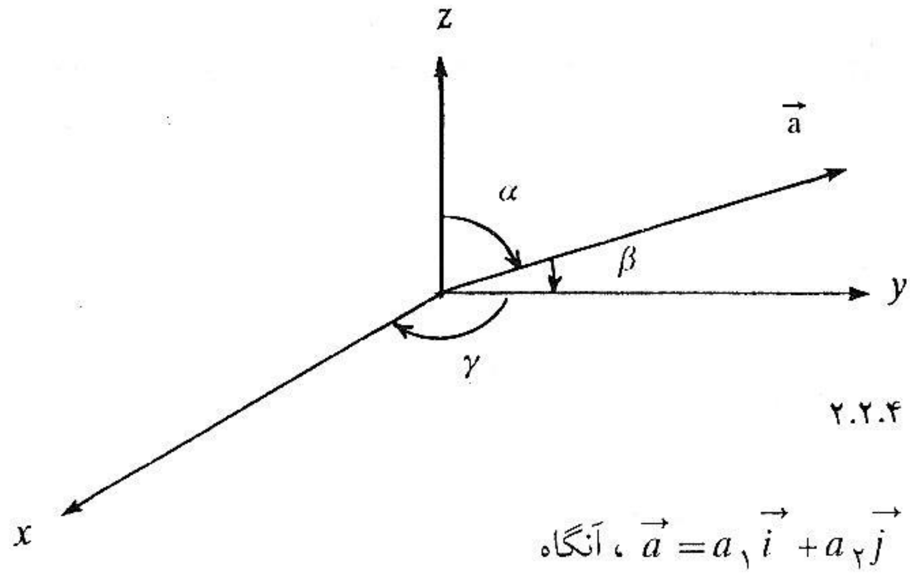
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

۶.۲.۴ مثال. کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a} = (۴,-۳,۱)$ و $\vec{b} = (۱,۲,-۲)$ را می‌یابیم:
با توجه به قضیهٔ ۴.۲.۴ داریم

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\,||\vec{b}\,|} = \frac{۴-۶-۲}{\sqrt{۱۶+۹+۱}\sqrt{۱+۴+۴}} = \frac{-۴}{۳\sqrt{۲۶}} = -\frac{۴\sqrt{۲۶}}{۷۸}\cdot$$

۷.۲.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. اگر $P(۱,۲,۱)$، $Q(-۱,۱,۰)$، $R(۰,۱,۱)$ و $S = (۰,۰,۱)$ چهار نقطه باشند، کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{PQ}$ و $\vec{RS}$ را بیابید.

۸.۲.۴ تعریف
زاویه‌های α و β و γ در بازهٔ $[۰,\pi]$، به ترتیب بین بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روی محورهای مختصات، و بردار ناصفر $\vec{a}$ را **زاویه‌های هادی $\vec{a}$** می‌نامیم. (شکل ۲.۲.۴ را ببینید).



شکل ۲.۲.۴

اگر $\vec{a} = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$، آنگاه

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}\,||\vec{i}\,|} = \frac{a_۱}{|\vec{a}\,|}} \quad , \quad \boxed{\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}\,||\vec{j}\,|} = \frac{a_۲}{|\vec{a}\,|}}$$

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}\,||\vec{k}\,|} = \frac{a_۳}{|\vec{a}\,|}}\cdot$$

بنابراین،

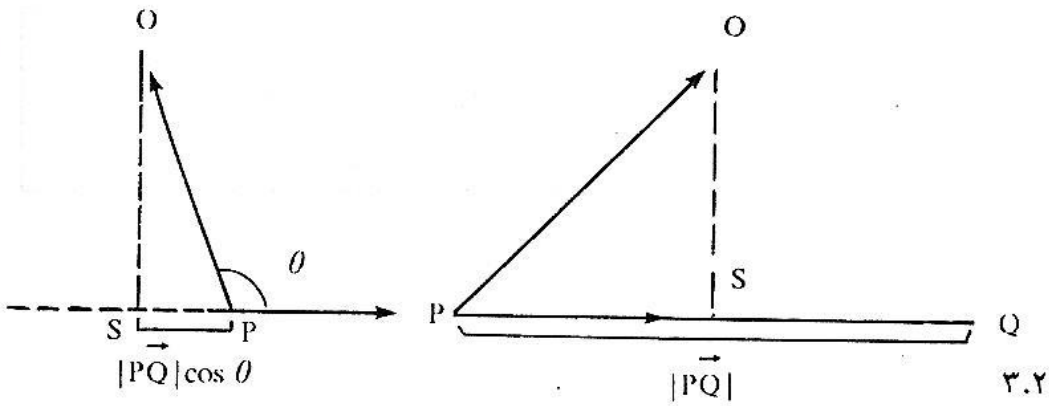
$$\boxed{\vec{a} = |\vec{a}\,|(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\,)\cdot}$$

۹.۲.۴ تعریف
اگر α ، β و γ زاویه‌های هادی $\vec{a}$ باشند، آنگاه $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را **کسینوسهای هادی** $\vec{a}$ می‌نامیم.

۱۰.۲.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. کسینوسهای هادی بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - ۵\vec{k}$ را حساب کنید.

تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر

اگر $\vec{PQ}$ و $\vec{PR}$ دو بردار و نقطهٔ S تصویر قائم نقطهٔ Q بر خطی که از P و R می‌گذرد باشد (شکل ۳.۲.۴ را ببینید)، آنگاه $|\vec{PQ}|\cos\theta$ را **مؤلفه (یا تصویر عددی)** $\vec{PQ}$ در جهت $\vec{PR}$ می‌نامیم.



شکل ۳.۲.۴

با توجه به قضیهٔ ۴.۲.۴، داریم

$$|\vec{PQ}|\cos\theta = \frac{\vec{PQ}\cdot\vec{PR}}{|\vec{PR}|} = \vec{PQ}\cdot\left(\frac{\vec{PR}}{|\vec{PR}|}\right) .$$

چون $\frac{\vec{PR}}{|\vec{PR}|}$ بردار واحد همجهت با $\vec{PR}$ است، پس مؤلفهٔ $\vec{PQ}$ در جهت $\vec{PR}$ برابر است با حاصلضرب داخلی $\vec{PQ}$ در بردار واحد همجهت با $\vec{PR}$. تعریف زیر را در رابطه با بردار $\vec{PS}$ داریم.

۱۱.۲.۴ تعریف
فرض کنیم $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد. **تصویربرداری** $\vec{b}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^{۲}}\vec{a} .$$

۱۲.۲.۴ مثال. فرض کنیم $\vec{a}=(۳,-۱,-۲)$ و $\vec{b}=\left(۲,-۳,\frac{۱}{۲}\right)$. بردار $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ را تعیین‌می‌کنیم.

داریم

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۶+۳-۱=۸$$

$$|\vec{a}|^{۲}=۹+۱+۴+۱۴ \quad .$$

در نتیجه

$$pr_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^{۲}}\vec{a}=\frac{۸}{۱۴}(۳,-۱,-۲)=\frac{۴}{۷}(۳,-۱,-۲)$$

$$=\left(\frac{۱۲}{۷},\frac{-۴}{۷},\frac{-۸}{۷}\right) .$$

۱۳.۲.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $\vec{a}=(-۲,۳,۱)$ ، $\vec{b}=(۷,۴,۵)$ و $\vec{c}=(۱,-۵,۲)$.

(الف) تصویر عددی $\vec{a}+\vec{b}$ را در جهت $\vec{c}$ بیابید.

(ب) تصویربرداری $\vec{a}+\vec{b}$ را در جهت $\vec{c}$ بیابید.

تمرین ۲.۴

در تمرینهای ۱ و ۲ ، $\vec{a}.\vec{b}$ و کسینوس زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

۱. $\vec{a}=(۱,۱,-۱)$ ، $\vec{b}=(۲,-۳,۴)$.

۲. $\vec{a}=(\sqrt{۲},۴,\sqrt{۳})$ ، $\vec{b}=(-\sqrt{۲},-\sqrt{۳},۲)$.

۳. نشان دهید که بردارهای $\vec{a}=(۲,۱,-۱)$ ، $\vec{b}=(۳,۷,۱۳)$ و $\vec{c}=(۲۰,-۲۹,۱۱)$ دوبه‌دو بر هم عمودند.

۴. فرض کنید $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,۰,۰)$. بردار $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ را تعیین کنید.

۵. با یک مثال نشان دهید که بردارهایی چون $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ وجود دارند به‌طوری که $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

۶. نامساوی کوشی ـ شوارتس را ثابت کنید:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}| \quad .$$

۷. با استفاده از تمرین ۶ نشان دهید که به ازای هر $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ ، $b_۱$ ، $b_۲$ ، $b_۳$ داریم

۱۴. ثابت کنید که قطرهای یک لوزی برهم عمودند.
۱۵. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند و $\vec{c} = |\vec{b}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{b}$. ثابت کنید که اگر $\vec{c} \neq \vec{0}$، آنگاه $\vec{c}$ نیمساز زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.
۱۶. نشان دهید که اگر α ، β و γ زاویه‌های هادی بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ باشند، آنگاه

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad .$$

حل مسأله‌های نمونه‌ای ۲.۴

۲.۲.۴. چون $\vec{i} = (1,0,0)$ ، $\vec{j} = (0,1,0)$ ، $\vec{k} = (0,0,1)$ ، پس

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

و به همین ترتیب $\vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$. همچنین

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) = 1$$

و به همین ترتیب $\vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$.

۷.۲.۴. بردارهای نمایشگر $\vec{PQ}$ و $\vec{RS}$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$\vec{a} = (-1-1, 1-2, 0-1) = (-2, -1, -1)$$

$$\vec{b} = (0-0, 0-1, 1-1) = (0, -1, 0) \cdot$$

روشن است که زاویهٔ بین $\vec{PQ}$ و $\vec{RS}$ همان زاویهٔ θ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. پس

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{0+1+0}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{0+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot$$

۱۰.۲.۴. چون $|\vec{a}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$ ، پس

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{38}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{-5}{\sqrt{38}}$$

۱۳.۲.۴. داریم

$$\vec{a}+\vec{b}=(۵,۷,۶)$$

$$|\vec{c}\,|=\sqrt{۱+۲۵+۴}=\sqrt{۳۰}\ .$$

در نتیجه

(الف) تصویر عددی $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$ در جهت $\vec{c}$ برابر است با

$$\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}\,|}=\frac{(۵,۷,۶)\cdot(۱,-۵,۲)}{\sqrt{۳۰}}$$

$$=\frac{۵-۳۵+۱۲}{\sqrt{۳۰}}=\frac{-۱۸}{\sqrt{۳۰}}=-\frac{۳}{۵}\sqrt{۳۰}$$

(ب) تصویر برداری $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$ در جهت $\vec{c}$ برابر است با

$$pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}\,|^{۲}}\vec{c}=\frac{-۱۸}{(\sqrt{۳۰})^{۲}}(۱,-۵,۲)$$

$$=-\frac{۳}{۵}(۱,-۵,۲)$$

$$=\left(-\frac{۳}{۵},۳,\frac{-۶}{۵}\right)\ .$$

۳.۴ ضرب برداری

در این بخش نوع دوم ضرب دو بردار، به نام ضرب‌برداری، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برخلاف ضرب عددی، حاصلضرب برداری دو بردار، خود یک بردار است. نخست تعریف جبری این ضرب را ارائه می‌دهیم و سپس تعبیر هندسی آن را می‌آوریم

۱.۳.۴ تعریف

فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. ***حاصلضرب برداری*** $\vec{a}$ در $\vec{b}$ برداری است به نمایش $\vec{a}\times\vec{b}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

راه ساده‌ای برای به‌خاطر سپردن فرمول $\vec{a}\times\vec{b}$ وجود دارد. به‌این منظور دترمینان مرتبهٔ ۲ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:[1]

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

که در آن a ، b ، c ، d اعداد حقیقی هستند. به‌عنوان مثال

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = (۲)(-۲)-(۳)(-۱) = -۴+۳ = -۱ \quad .$$

بنابراین فرمول $\vec{a}\times\vec{b}$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix}\vec{k} \cdot$$

این عبارت را می‌توان با استفاده از نماد دترمینان مرتبهٔ ۳، به‌صورت

$$a\times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

نمایش داد.

۲.۳.۴ مثال. به ازای بردارهای $\vec{a} = (۲,-۱,۳)$ و $\vec{b} = (-۱,-۲,۴)$، بردارهای $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ را مشخص می‌کنیم:

بنا به تعریف، داریم

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-۴+۶)\vec{i} - (۸+۳)\vec{j} + (-۴-۱)\vec{k}$$

$$= ۲\vec{i} - ۱۱\vec{j} - ۵\vec{k}$$

---

۱. دترمینانهای مرتبه‌های بالاتر را در فصل ۵ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

و

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۱&-۲&۴\\۲&-۱&۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-۲&۴\\-۱&۳\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-۱&۴\\۲&۳\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-۱&-۲\\۲&-۱\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-۶+۴)\vec{i}-(-۳-۸)\vec{j}+(۱+۴)\vec{k}$$

$$=-۲\vec{i}+۱۱\vec{j}+۵\vec{k}\,\cdot$$

توجه کنید که در مثال فوق، $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ قرینهٔ یکدیگرند. این مطلب اتفاقی نبوده و در حالت کلی درست است (تمرین ۶.۳.۴ را ببینید).

۳.۳.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. نشان دهید که

$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\quad,\quad\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\quad,\quad\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$$

۴.۳.۴ قضیه

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و α یک اسکالر باشد، آنگاه

(الف) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

(ب) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(پ) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

(ت) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

(ث) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

اثبات. اثبات این احکام هرچندگاهی طولانی است ولی به‌طور مستقیم از تعریف به دست می‌آیند. برای نمونه (ت) را ثابت‌می‌کنیم. فرض‌کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $\vec{c}=(c_۱,c_۲,c_۳)$. در این صورت

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_۱&a_۲&a_۳\\b_۱+c_۱&b_۲+c_۲&b_۳+c_۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_۲&a_۳\\b_۲+c_۲&b_۳+c_۳\end{vmatrix}\vec{i}$$

$$=(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)-(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲$$

$$=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲-(\vec{a}\cdot\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^۲$$

$$=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲(۱-\cos^۲\theta)$$

$$=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\sin^۲\theta\cdot$$

چون وقتی $۰\leq\theta\leq\pi$ ، $\sin\theta\geq۰$ ، پس

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\cdot$$

حکم زیر بلافاصله از حکم (ب) در قضیهٔ بالانتیجه می‌شود.

۷.۳.۴ نتیجه

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=۰$

۸.۳.۴ مثال. فرض کنیم $\vec{a}=(۴,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$. برداری پیدا می‌کنیم که بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود باشد:

با توجه به قضیهٔ ۶.۳.۴، $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}}$ چنین برداری است:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۴&-۱&۳\\ ۲&۳&-۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-۱&۳\\ ۳&-۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۴&۳\\ ۲&-۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۴&-۱\\ ۲&۳\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(۱-۹)\vec{i}-(-۴-۶)\vec{j}+(۱۲+۲)\vec{k}$$

$$=-۸\vec{i}+۱۰\vec{j}+۱۴\vec{k}\cdot$$

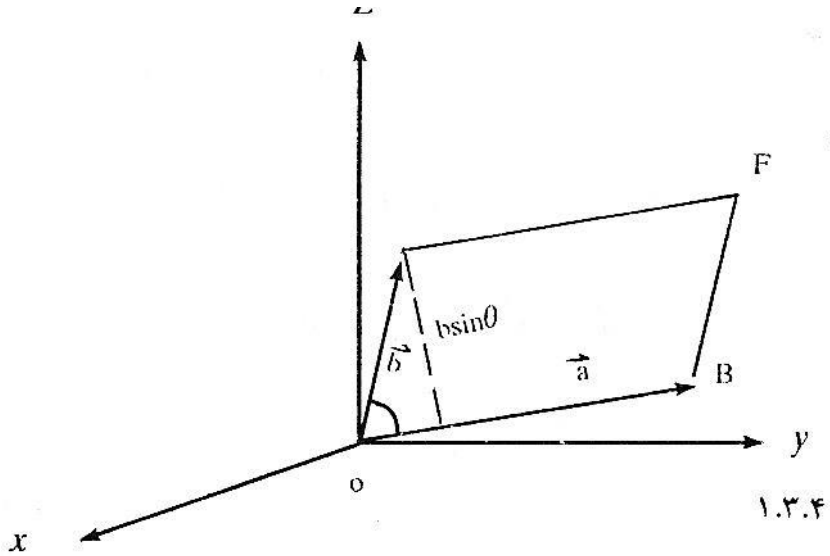
۹.۳.۴ تذکر. شکل زیر نشان می‌دهد که مساحت متوازی الاضلاع $OAFB$ برابر است با

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\cdot$$

در نتیجه با توجه به حکم (ب) از قضیهٔ ۵.۳.۴، مساحت این متوازی الاضلاع برابر است با

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\cdot$$

مساحت متوازی الاضلاع



شکل ۱.۳.۴

۱۰.۳.۴ مثال. فرض کنیم $P(۳,-۲,۱)$ ، $Q(۷,-۳,۴)$ و $R(۵,۱,۰)$ سه نقطه در فضا باشند. مساحت مثلث PQR را حساب می‌کنیم:

فرض‌می‌کنیم $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (۴,-۱,۳)$ و $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = (۲,۳,-۱)$ با توجه به مثال ۸.۳.۴، داریم

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-۸, ۱۰, ۱۴) \quad .$$

پس مساحت مثلث PQR برابر است با

$$\frac{۱}{۲} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۸)^۲ + (۱۰)^۲ + (۱۴)^۲} = ۳\sqrt{۱۰} .$$

۱۱.۳.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. نشان دهید که $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ سه ضلع مجاور آن باشند. سپس حجم این متوازی‌السطوح را به ازای $\vec{a} = (۱,-۱,۰)$ ، $\vec{b} = (۲,۳,-۱)$ و $\vec{c} = (-۱,۰,۲)$ حساب کنید.

تمرین ۳.۴

در تمرینهای ۱ تا ۴، بردارهای $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$ را تعیین کنید.

۱. $\vec{a} = (۱,۱,۰)$، $\vec{b} = (۰,۱,۱)$، $\vec{c} = (-۱,-۳,۴)$.

۲. $\vec{a} = (۱,۱,۱)$، $\vec{b} = (۱,۰,-۱)$، $\vec{c} = (۱,۱,-۱)$.

۳. $\vec{a} = (۳,۴,۱۲)$، $\vec{b} = (۳,۴,-۱۲)$، $\vec{c} = \left(\frac{۱}{۸}, \frac{-۱}{۱۲}, \frac{۱}{۶}\right)$.

۴. $\vec{a} = (۳,۴,۱۲)$، $\vec{b} = (۳,۴,۱۲)$، $\vec{c} = (۱,۱,۰)$.

۵. با استفاده از ضرب برداری، سینوس زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داده شده در تمرین ۲ را حساب کنید.

۶. ثابت کنید که $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$.

۷. ثابت کنید که $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.

۸. ثابت کنید که $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = ۲\vec{b}\times\vec{a}$.

۹. با یک مثال نشان دهید که ممکن است $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$، $\vec{a}\neq\vec{۰}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۱۰. ثابت کنید که

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{۰}\cdot$$

۱۱. فرض کنید $P(۱,-۱,۲)$ ، $Q(۰,۳,-۱)$ ، $R(۳,-۴,۱)$ سه نقطه باشند.

(الف) برداری بیابید که بر صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، عمود باشد.

(ب) مساحت مثلث PQR را محاسبه کنید.

۱۲. فرض کنید P ، Q ، R سه نقطه داده شده در تمرین ۱۱ باشند. حجم متوازی‌السطوحی را که سه ضلع مجاور آن $\vec{OP}$ ، $\vec{OQ}$ ، $\vec{OR}$ هستند، حساب کنید.

حل مسأله‌های نمونه‌ای ۳.۴

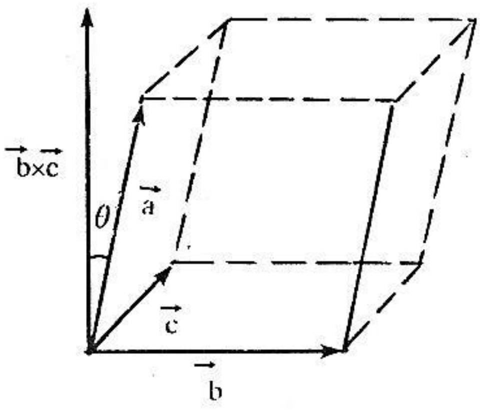
۳.۳.۴. چون $\vec{i} = (۱,۰,۰)$ و $\vec{j} = (۰,۱,۰)$ ، پس

$$\vec{i}\times\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= ۰\vec{i} - ۰\vec{j} + ۱\vec{k} = \vec{k}\cdot$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

۱۱.۳.۴. اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ باشد، آنگاه ارتفاع متوازی‌السطوح برابر است با $|\vec{a}||\cos\theta|$ (شکل زیر را ببینید).



چون مساحت قاعدهٔ متوازی‌السطوح برابر با $|\vec{b}\times\vec{c}|$ است، پس

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = |\vec{b}\times\vec{c}|\,(|\vec{a}|\,|\cos\theta|)$$

از طرفی $\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}\times\vec{c}|\,|\cos\theta|$، پس

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

به ازای بردارهای داده شدهٔ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ داریم

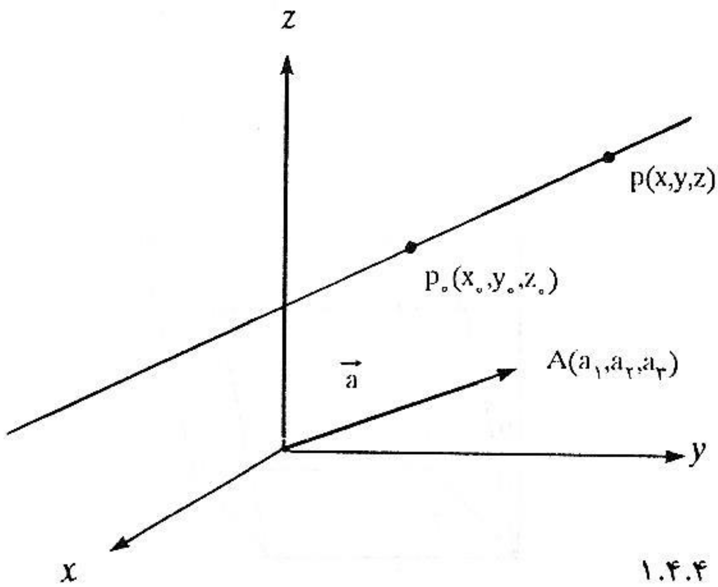
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_۱\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix} - a_۲\begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix} + a_۳\begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۱\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} - (-۱)\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۰\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۹ \quad .$$

پس حجم این متوازی‌السطوح برابر ۹ است.

۴.۴ خط در فضا

هر خط l .در فضا (یا در صفحه) توسط دو نقطه یا یک نقطه و برداری موازی با l مشخص می‌شود. در شکل زیر نقطهٔ $P_۰(x_۰,y_۰,z_۰)$ بر خط l و بردار $\vec{a} = (a_۱,a_۲,a_۳)$ موازی با l رسم شده است. در نتیجه نقطهٔ $P(x,y,z)$ بر خط l است اگر و تنها اگر اسکالر t وجود داشته باشد به‌طوری که $\overrightarrow{P_۰P}=t\vec{a}$



شکل ۱.۴.۴

حال اگر $\vec{P} = O\vec{P}$ و $\vec{P}_{\circ} = O\vec{P}_{\circ}$ آنگاه $\vec{P} - \vec{P}_{\circ} = P_{\circ}\vec{P} = t\vec{a}$.

پس

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}_{\circ} + t\vec{a}} \cdot$$

معادله برداری

این معادله را **معادلهٔ برداری** خط l می‌نامیم. این معادلهٔ برداری معادل است با سه معادلهٔ عددی زیر که از مساوی قراردادن مؤلفه‌های دو طرف تساوی فوق به‌دست آمده است:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_{\circ} + ta_{۱} \\ y = y_{\circ} + ta_{۲} \\ z = z_{\circ} + ta_{۳} \end{array}}$$

معادله پارامتری

که در آن $t \in R$. این معادلات را **معادلات پارامتری** خط l می‌نامیم و t را یک **پارامتر** می‌گوییم.

۱.۴.۴ مثال معادلهٔ برداری و معادلات پارامتری خط l که از نقطهٔ $P_{\circ}(-۱,۳,\circ)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{a} = (۲,-۳,-۱)$ موازی است را تعیین می‌کنیم:

اگر $P(x,y,z)$ ، آنگاه معادلهٔ برداری خط l عبارت است از

$$\vec{p} = \vec{P}_{\circ} + t\vec{a} \cdot$$

یعنی

$$(x,y,z) = (-۱,۳,\circ) + t(۲,-۳,-۱) \cdot$$

در نتیجه معادلات پارامتری l عبارت‌اند از

$$x = -۱ + ۲t \quad , \quad y = ۳ - ۳t \quad , \quad z = -t$$

از حذف t در معادلات پارامتری خط l، معادلات

$$\boxed{\frac{x - x_{\circ}}{a_{۱}} = \frac{y - y_{\circ}}{a_{۲}} = \frac{z - z_{\circ}}{a_{۳}}}$$

معادله متقارن یا دکارتی

به‌دست می‌آیند. این معادلات را **معادلات متقارن** یا **دکارتی** خط l می‌نامیم.

۲.۴.۴ مثال. معادلات متقارن خط l را که از دو نقطهٔ $P_۱(۴,-۶,۵)$ و $P_۲(۲,-۳,۰)$ می‌گذرد تعیین می‌کنیم:

چون $P_۱$ و $P_۲$ دو نقطهٔ متمایز بر خط l هستند، پس بردار $\overrightarrow{P_۱P_۲}$ موازی با l است. چون

$$\overrightarrow{P_۱P_۲}=(۲-۴,-۳+۶,۰-۵)=(-۲,۳,-۵)$$

پس معادلات متقارن خط l ، با انتخاب $(۴,-۶,۵)$ به‌عنوان نقطهٔ $P_۰$ عبارت‌اند از

$$\frac{x-۴}{-۲}=\frac{y+۶}{۳}=\frac{z-۵}{-۵}\,.$$

اگر $P_۰$ را نقطهٔ $(۲,-۳,۰)$ انتخاب کنیم. معادلات

$$\frac{x-۲}{-۲}=\frac{y+۳}{۳}=\frac{z}{-۵}\,.$$

به‌دست می‌آیند. روشن است که هر دو دسته معادلات، مشخص کنندهٔ یک خط l هستند.

۳.۴.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید خط l توسط معادلات

$$\frac{x-۴}{۲}=\frac{y-۵}{۱۷}=\frac{z}{۷}$$

داده شده است. برداری موازی با l و نقطه‌ای بر l بیابید.

۴.۴.۴ تذکر. در معادلات متقارن خط l ، فرض بر این است که $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ مخالف صفر هستند. در اینجا حالتهایی را بررسی می‌کنیم که یک یا دوتا از این مقادیر صفر باشند.

حالت اول: $a_۱=۰$ ولی $a_۲$ و $a_۳$ مخالف صفر باشند. در این صورت خط l موازی با صفحهٔ yz است و معادلات متقارن آن عبارت‌اند از

$$x=x_۰\quad,\quad\frac{y-y_۰}{a_۲}=\frac{z-z_۰}{a_۳}\,.$$

حالت دوم: $a_۱=a_۲=۰$ ولی $a_۳\neq ۰$. در این صورت خط l موازی با محور z است. یعنی l خط قائمی است که از نقطهٔ $(x_۰,y_۰,z_۰)$ می‌گذرد. معادلات پارامتری آن عبارت‌اند از

$$x=x_۰\quad,\quad y=y_۰\quad,\quad z=z_۰+ta_۳$$

و در نتیجه معادلات متقارن آن عبارت‌اند از

$$x=x_۰\quad,\quad y=y_۰\,.$$

حالتهای دیگر شبیه به این دو حالت هستند.

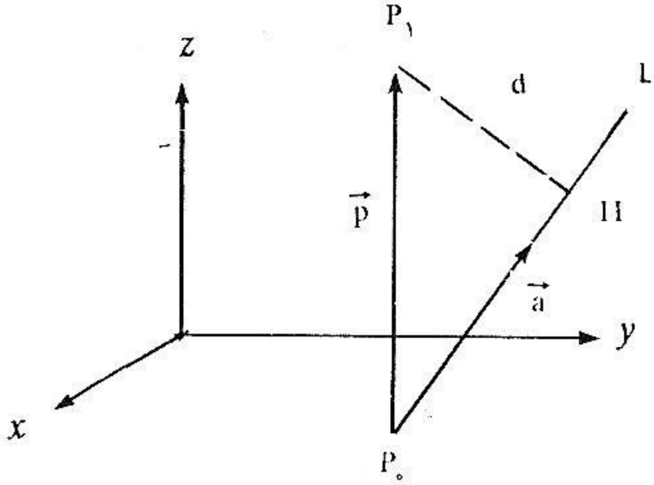
۵.۴.۴ مثال. معادلات متقارن خط l را که از نقطهٔ $(۸,-۱,۲)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{a} = (۲,۰,۳)$ موازی است، می‌یابیم.

در اینجا $a_۱ = ۲$ ، $a_۲ = ۰$ و $a_۳ = ۳$. در نتیجه معادلات زیر برای l به‌دست می‌آیند:

$$y = -۱ \quad , \quad \frac{x-۸}{۲} = \frac{z-۲}{۳}$$

۶.۴.۴ فاصله نقطه از خط

فرض کنیم خط l از نقطهٔ $P_۰$ می‌گذرد و با بردار $\vec{a}$ موازی است. فرض کنیم نقطهٔ $P_۱$ بر l قرار ندارد (شکل ۱.۴.۴ را ببینید).



شکل ۱.۴.۴

در این صورت

$$d = |\overrightarrow{P_۰P_۱}| \sin\theta$$

چون $|\vec{a} \times \overrightarrow{P_۰P_۱}| = |\vec{a}||\overrightarrow{P_۰P_۱}| \sin\theta$ ، پس

فاصله نقطه از خط

$$\boxed{d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{P_۰P_۱}|}{|\vec{a}|}}$$

۷.۴.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. فاصلهٔ نقطهٔ $P_۱(۲,۱,-۱)$ را از خط l با معادلات پارامتری $x = ۳t$ ، $y = ۱ + ۲t$ ، $z = -۵-t$ به‌دست آورید.

۸.۴.۴ مثال. مسألهٔ نمونه‌ای ۷.۴.۴ را با استفاده از ضرب عددی حل می‌کنیم:

با توجه به شکل ۴.۴.۱، داریم

$$d^{۲} = |\overrightarrow{P}|^{۲} - |\overrightarrow{P_{\circ}H}|^{۲}.$$

خط داده شده از نقطهٔ $P_{\circ}(\circ, ۱, -۵)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{a} = (۳, ۲, -۱)$ موازی است. پس

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_{\circ}P_{۱}} = (۲, \circ, ۴)$$

و در نتیجه $|\vec{P}| = ۴ + \circ + ۱۶ = ۲\circ$. همچنین، چون $\vec{a}.\vec{P} = |\vec{a}||\vec{P}| \cos\theta$، پس

$$|\overrightarrow{P_{\circ}H}|^{۲} = (|\overrightarrow{P}| \cos\theta)^{۲} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{P}}{|\vec{a}|}\right)^{۲}$$

$$= \left(\frac{(۳, ۲, -۱) \cdot (۲, \circ, ۴)}{\sqrt{۹ + ۴ + ۱}}\right)^{۲}$$

$$= \left(\frac{۶ + \circ - ۴}{\sqrt{۱۴}}\right)^{۲} = \frac{۴}{۱۴} = \frac{۲}{۷}.$$

در نتیجه

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{P}|^{۲} - |\overrightarrow{P_{\circ}H}|^{۲}} = \sqrt{۲\circ - \frac{۲}{۷}} = \sqrt{\frac{۱۳۸}{۷}}.$$

تمرین ۴.۴

در تمرینهای ۱ تا ۴، معادلات پارامتری و متقارن خط l را که از نقطهٔ P می‌گذرد و با بردار $\vec{a}$ موازی است، بنویسید.

۱. $P(-۲, ۱, \circ)$ ، $\vec{a} = (۳, -۱, ۵)$

۲. $P(\circ, \circ, \circ)$ ، $\vec{a} = (۱۱, -۱۳, -۱۵)$

۳. $P(-۳, ۶, ۲)$ ، $\vec{a} = (۱, -۱, \circ)$

۴. $P(۲, \circ, ۵)$ ، $\vec{a} = (\circ, ۲, ۳)$

۵. معادلات پارامتری و متقارن خطی را که از دو نقطهٔ $P_{۱}(۵, -۲, ۴)$ و $P_{۲}(۲, ۶, ۱)$ می‌گذرد، بنویسید.

۶. معادلات متقارن خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $P_{۱}(-۱, ۱, \circ)$ و $P_{۲}(-۱, ۵, ۷)$ می‌گذرد.

۷. معادلات متقارن خطی را بنویسید که از نقطهٔ $P(۳, -۱, ۲)$ می‌گذرد و با خط زیر موازی است:

۵.۴ صفحه در فضا

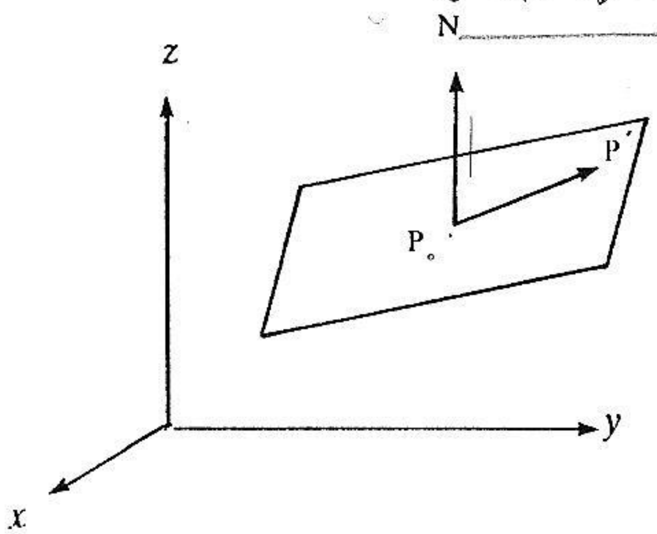
روشن است که تنها یک صفحه وجود دارد که از نقطهٔ P می‌گذرد و بر خط l (یا بر برداری چون $\vec{N}$) عمود است. در نتیجه هر صفحه توسط یک نقطه و یک بردار عمود بر آن مشخص می‌شود.

فرض کنیم $P_\circ(x,y,z)$ یک نقطه و $\vec{N} = (a,b,c)$ یک بردار ناصفر باشد. اگر صفحهٔ L از $P_\circ$ بگذرد و بر $\vec{N}$ عمود باشد، آنگاه نقطهٔ $P(x,y,z)$ بر این صفحه است اگر و تنها اگر بردار

$$\overrightarrow{P_\circ P} = (x - x_\circ, y - y_\circ, z - z_\circ)$$

بر بردار $\vec{N}$ عمود باشد (شکل ۱.۵.۴ را ببینید). در نتیجه $\vec{N}.\overrightarrow{P_\circ P} = \circ$، یعنی

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$$



شکل ۱.۵.۴

این معادله را به‌صورت

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$ معادله صفحه

نیز می‌توان نوشت که در آن $d = ax_\circ + by_\circ + cz_\circ$. هر یک از معادلات بالا را **معادلهٔ صفحه‌ای** که از $P_\circ$ می‌گذرد و بر بردار $\vec{N}$ عمود است، می‌نامیم. بردار $\vec{N}$ را **بردار قائم** (یا **نرمال**) بر صفحه می‌خوانیم.

۱.۵.۴ مثال. معادلهٔ صفحه‌ای را می‌نویسیم که از نقطهٔ $(۵,-۲,۴)$ می‌گذرد و بردار قائم آن برابر با $\vec{N} = (۱,۲,۳)$ است:

معادلهٔ این صفحه عبارت است از

$$۱(x - ۵) + ۲(y + ۲) + ۳(z - ۴) = \circ$$

یا

$$x + ۲y + ۳z - ۱۳ = \circ$$

۵.۵.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $P_{۰}(۱,۰,۲)$ ، $P_{۱}(-۱,۳,۴)$ ، $P_{۲}(۳,۵,۷)$ می‌گذرد.

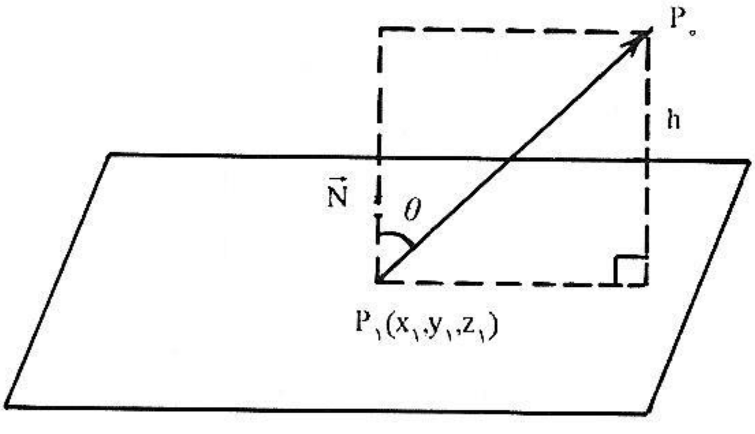
۶.۵.۴ تعریف
دو صفحه با بردارهای قائم $\vec{N}_{۱}$ و $\vec{N}_{۲}$ را **موازی** می‌گوییم اگر $\vec{N}_{۱}$ موازی با $\vec{N}_{۲}$ و **عمود** می‌گوییم اگر $\vec{N}_{۱}$ عمود بر $\vec{N}_{۲}$ باشد.

۷.۵.۴ مثال. نشان می‌دهیم که دو صفحهٔ $۲x-۳y-z=۵$ و $-۶x+۹y+۳z+۲=۰$ موازیند.

بردارهای $\vec{N}_{۱}=(۲,-۳,-۱)$ و $\vec{N}_{۲}=(-۶,۹,۳)$ به‌ترتیب قائم بر صفحه‌های داده شده هستند. چون $\vec{N}_{۲}=-۳\vec{N}_{۱}$ ، پس این دو بردار، و در نتیجه دو صفحهٔ داده شده، موازیند.

۸.۵.۴ مسألهٔ نمونه‌ای. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $P(۵,-۲,۴)$ می‌گذرد و با صفحهٔ $۳x+y-۶z+۸=۰$ موازی است.

۹.۵.۴ مثال. فرمولی برای فاصلهٔ نقطهٔ $P_{۰}(x_{۰},y_{۰},z_{۰})$ از صفحهٔ $ax+by+cz+d=۰$ به‌دست می‌آوریم:



شکل ۳.۵.۴

بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ قائم بر صفحه است (شکل ۳.۵.۴ را ببینید). روشن است که

$$h=|\overrightarrow{P_{۰}P_{۱}}||\cos\theta|$$

چون $\vec{N}.\overrightarrow{P_{۰}P_{۱}}=|\vec{N}||\overrightarrow{P_{۰}P_{۱}}|\cos\theta$ ، پس

$$h=\frac{|\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\overrightarrow{N}|}$$

فاصله نقطه از صفحه

از آنجا که $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ و P_1 بر صفحه واقع است، پس

$$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}=a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)$$

$$=ax_1+by_1+cz_1-ax_0-by_0-cz_0$$

$$=-d-ax_0-by_0-cz_0$$

در نتیجه

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

فاصله‌ی نقطه از صفحه

۱۰.۵.۴ مسألهٔ نمونه‌ای فاصلهٔ نقطهٔ $P_0(-1,1,2)$ را از صفحهٔ $3x-2y+z=1$ حساب کنید.

۱۱.۵.۴ مثال محل تلاقی خط « $x=2+3t$ ، $y=-3+5t$ ، $z=4-6t$ » را با صفحهٔ $2x-3y-3z=4$ تعیین می‌کنیم:

اگر معادلهٔ $2(2+3t)-3(-3+5t)-3(4-6t)=4$ را نسبت به t حل کنیم، $t=\frac{1}{3}$ به‌دست می‌آید. این مقدار t را در معادلات پارامتری خط قرار می‌دهیم. پس نقطهٔ $\left(3, \frac{-4}{3}, 2\right)$ محل تلاقی این خط و صفحه است.

۱۲.۵.۴ مسألهٔ نمونه‌ای معادلات پارامتری خط l را که محل تلاقی دو صفحهٔ $3x-2y+4z=2$ و $2x+y-3z=13$ است بنویسید.

تمرین ۵.۴

۱. معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ $P_0(-1,2,3)$ می‌گذرد و بر $\overrightarrow{N}=\left(-4, 15, \frac{-1}{2}\right)$ عمود است، بنویسید.

توابع چندمتغیره

مقدمه و هدف کلی

تاکنون توابع حقیقی و توابع‌برداری‌ای راکه تنها دارای یک متغیر مستقل بودند مورد مطالعه قرار دادیم. اگرچه بسیاری از پدیده‌های جهان فیزیکی توسط این توابع توصیف می‌شوند، ولی اغلب کمیتهای فیزیکی درواقع به بیش از یک متغیر وابسته هستند. به عنوان مثال، حجم یک مکعب‌مستطیل به طول، عرض و ارتفاع آن و دمای نقطه‌ای از یک جسم به مختصات آن نقطه (و احتمالاً زمان) بستگی دارد. متناظر با هر کمیتی که به چند متغیر وابسته باشد، یک تابع با چند متغیر وجود دارد. هدف اصلی ما در این فصل تعمیم مفهوم مشتق و کاربردهای آن به توابع چندمتغیره است. مفهوم انتگرال این توابع را در فصل ۸ مورد بحث قرار می‌دهیم.

هدفهای دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می‌رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. توابع چندمتغیره را تعریف کند و مثالهایی از آن ارائه دهد.

۲. منحنیهای تراز توابع دومتغیره را رسم کند.

۳. نمودار توابع دومتغیرهٔ استاندارد را رسم کند.

۴. سطوح تراز توابع سه متغیره را مشخص کند.

۵. حد و پیوستگی توابع چندمتغیره را در سطح مثالها و تمرینهای این فصل محاسبه کند.

۶. مشتقهای جزئی توابع چندمتغیره را محاسبه کند.

۷. دیفرانسیل کل توابع چندمتغیره را تعریف کند.

۸. مقدار تقریبی نمو توابع چندمتغیره را محاسبه کند.

۹. قاعدهٔ زنجیره‌ای را به کار ببرد.

۱۰. گرادیان و مشتق سویی توابع دو و سه متغیره را محاسبه کند.

۱۱. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطوح را بنویسد.
۱۲. نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و نقاط زین‌اسبی توابع دومتغیره را تعیین کند.
۱۳. روش مضرب لاگرانژ را توضیح دهد و آن را به کار ببرد.

۱.۷ توابع چندمتغیره

در این بخش تعریف توابع چندمتغیره و نمودار توابع دومتغیره را بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۷ تعریف
تابع f که دامنهٔ آن زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^n$ و برد آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد را یک **تابع (حقیقی)** n **متغیره** می‌گوییم.

تابع f یک تابع دومتغیره است، اگر دامنهٔ آن مجموعه‌ای از نقاط صفحه باشد. به همین ترتیب fرا یک تابع سه‌متغیره می‌گوییم اگر دامنهٔ آن مجموعه‌ای از نقاط فضا باشد. از آنجا که اکثر ویژگیهای جالب توابع چندمتغیره در توابع دومتغیره تجلی می‌یابد، توجه خود را به این حالت ساده‌تر متمرکز می‌کنیم و تعاریف و قضیه‌ها را در مورد توابع دومتغیره ارائه می‌دهیم.

اگر f یک تابع n متغیره باشد، نگارهٔ آن در $(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ را با $f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ نمایش می‌دهیم. اگر تابع n متغیرهٔ f توسط فرمول (یا فرمولهایی) تعریف شده و دامنهٔ آن مشخص نشده باشد، دامنهٔ آن را همهٔ n- تایی‌هایی چون $(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ درنظر می‌گیریم که به ازای آنها این فرمول بامعنی باشد. به عنوان مثال، اگر

$$f(x,y)=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$$

آنگاه دامنهٔ f مجموعهٔ نقاط (x,y) در صفحهٔ xyاست به طوری که

$$۴-x^۲-y^۲\geq ۰.$$

به عبارت دیگر، دامنهٔ f ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^۲+y^۲=۴$ در صفحهٔ xyاست. اگر

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+۲y^۲+۴z^۲}$$

آنگاه، دامنهٔ g مجموعهٔ همهٔ نقاط فضاست، زیرابه ازای هر (x,y,z)، $x^۲+۲y^۲+۴z^۲\geq ۰$. اگر

$$f(x,y)=xy \quad , \quad x\geq ۰ \quad , \quad y\geq ۰$$

در این صورت، دامنهٔ f مشخص شده است و برابر است با ربع اول صفحهٔ xy.

مجموع، حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع دو (یا چند) متغیره به صورت زیر تعریف می‌شوند.

۲.۱.۷ تعریف

اگر f و g دو تابع با دومتغیر باشند، آنگاه

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$$

$$(f-g)(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$$

$$(fg)(x,y)=f(x,y)g(x,y)$$

$$(\frac{f}{g})(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

دامنهٔ توابع $f+g$ ، $f-g$ و fg برابر با اشتراک دامنه‌های f و g است، و دامنهٔ $\frac{f}{g}$ برابر با مجموعه نقاط (x,y) مشترک بین دامنه‌های f و g است به طوری که $g(x,y) \neq ۰$.

تابع f با دو متغیر x و y را یک ***تابع چندجمله‌ای*** می‌گوییم اگر مجموع توابعی به صورت ax^my^n باشد، که در آن a عددی حقیقی، m و n دو عدد صحیح نامنفی هستند. به همین ترتیب، f یک تابع گویا است اگر خارج قسمت دو تابع چندجمله‌ای باشد. این مفاهیم در مورد توابع با بیش از دومتغیر نیز به همین صورت تعریف می‌شوند. به عنوان مثال، اگر

$$f(x,y)=۳x^۲y^۲-۵x^۲+۶x+۷y+\sqrt{۳}$$

$$g(x,y,z)=۳xyz+۵y^۳z^۴+۷$$

آنگاه f و g دوتابع چندجمله‌ای هستند. همچنین اگر

$$f(x,y)=\frac{x^۲+y^۴}{xy+۲y^۲}$$

$$g(x,y,z)=\frac{xy}{۱+x^۲+y^۲+z^۲}$$

آنگاه f و g دو تابع گویا هستند.

اگرچه دو تابع دو (یا چند) متغیره ترکیب نمی‌شوند، ولی اگر f یک تابع دومتغیره و g یک تابع یک متغیره باشند، آنگاه $g\circ f$ به صورت

$$\boxed{(g\circ f)(x,y)=g(f(x,y))}$$

تعریف می‌شود. دامنهٔ تابع $g\circ f$ مجموعهٔ همهٔ نقاط (x,y) در دامنهٔ f است به طوری که عدد حقیقی $f(x,y)$ در دامنهٔ g باشد. تعریف ترکیب توابع با بیش از دومتغیر و توابع با یک متغیر نیز به صورت فوق است.

۳.۱.۷ مثال. فرض کنیم

$$F(x,y)=\sqrt{\ln(۴-x^۲-y^۲)}$$

توابع f، با دو متغیر، و g، با یک متغیر، را می‌یابیم که $F=g\circ f$ و دامنهٔ F را مشخص می‌کنیم:

به روشهای مختلف می‌توان F را به صورت ترکیب $g\circ f$ نوشت. به عنوان مثال، اگر

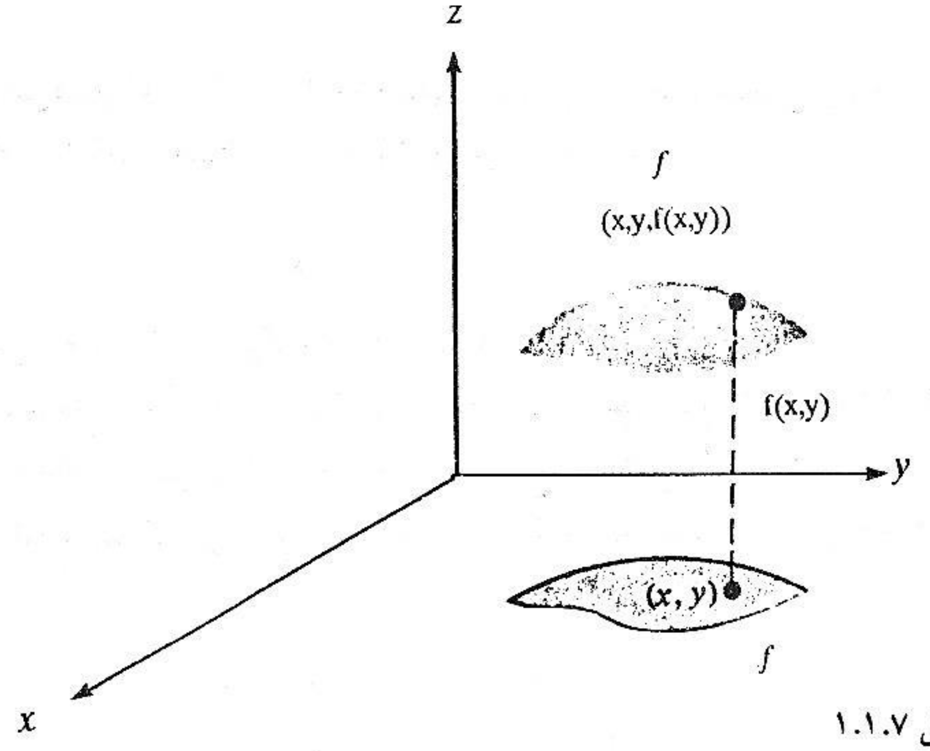
$$g(t)=\sqrt{t} \qquad , \qquad f(x,y)=\ln(۴-x^۲-y^۲)$$

آنگاه $F=g\circ f$. دامنهٔ f مجموعهٔ همهٔنقاط (x,y) درصفحه‌است به‌طوری‌که $۴-x^۲-y^۲>۰$ و دامنهٔ g مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است. در نتیجه، دامنهٔ $g\circ f$ مجموعهٔ همهٔ نقاط (x,y) در صفحه است به طوری که $۴-x^۲-y^۲>۰$ و $ln(۴-x^۲-y^۲)\geq ۰$. چون $ln(۴-x^۲-y^۲)\geq ۰$ اگر و تنها اگر $۴-x^۲-y^۲\geq ۱$، پس دامنهٔ $F=g\circ f$ مجموعهٔ همهٔ نقاط (x,y) است به طوری که $۴-x^۲-y^۲\geq ۱$ یا $x^۲+y^۲\leq ۳$. (یعنی، نقاط محدود به و بر روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳$).

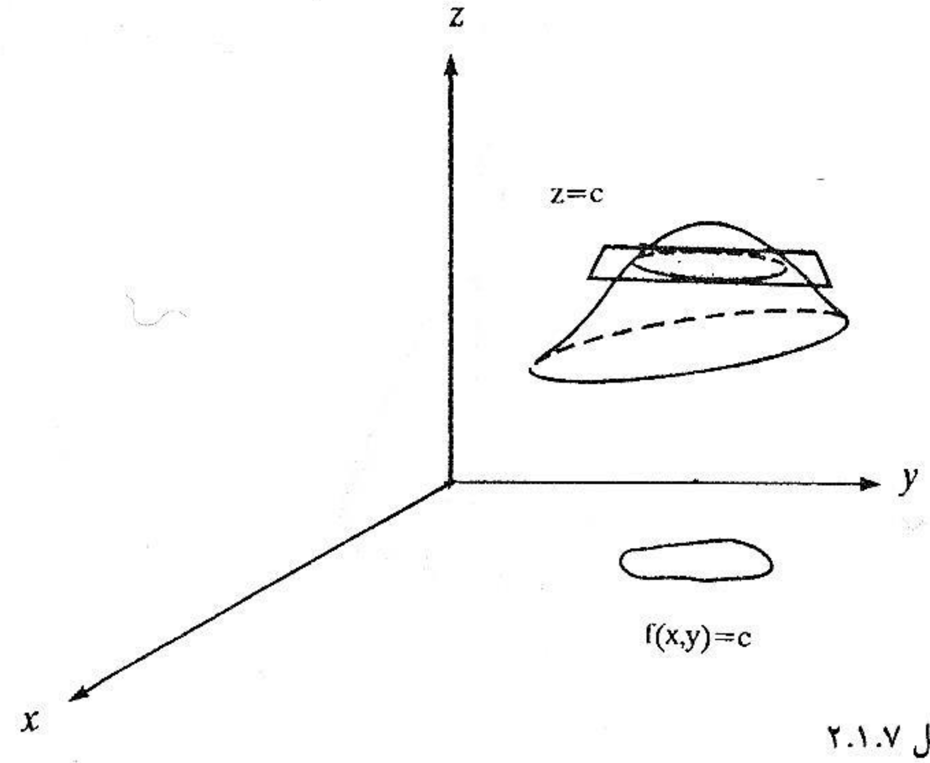
۴.۱.۷ نمودار توابع دومتغیره

نمودار یک تابع دومتغیره چون f مجموعهٔ نقاط $(x,y,f(x,y))$ در فضا است به طوری که (x,y) در دامنهٔ f باشد (شکل ۱.۱.۷ راببینید). اگر،مطابق معمول توابع‌یک متغیره، بنویسیم $z=f(x,y)$ ، در این صورت نمودار تابع f مجموعهٔ نقاط (x,y,z) است به طوری که $z=f(x,y)$.

نمودار یک تابع دومتغیره معمولاً سطح یا رویه‌ای در فضاست. برای رسم این نمودارها آگاهی از مقاطع آنها با صفحه‌های $z=c$ ، یعنی صفحه‌های موازی با صفحهٔ xy ، مفید است (شکل ۲.۱.۷ را ببینید). این مقاطع را ***اثرهای*** نمودار f می‌گوییم. به عبارت دیگر اثر f در صفحهٔ $z=c$ مجموعهٔ همهٔ نقاط (x,y,c) در فضاست به طوری که $f(x,y)=c$.

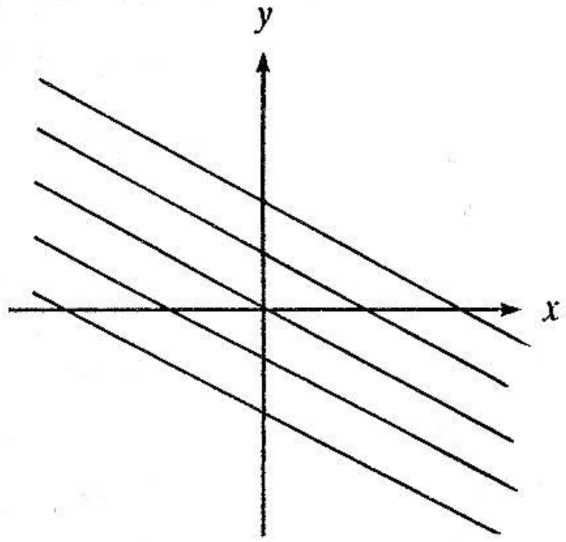


شکل ۱.۱.۷



شکل ۲.۱.۷

به عنوان مثال اگر $z = f(x,y) = ۴ - x^۲ - y^۲$ آنگاه اثر f در صفحهٔ $z=۱$ نمودار $۱ = ۴ - x^۲ - y^۲$ یا $x^۲ + y^۲ = ۳$ است که دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ و مرکز $(۰,۰,۱)$ است. مفهوم دیگری که رابطهٔ نزدیکی با اثر توابع دومتغیره دارد و برای توصیف نمودار این توابع به‌کار می‌رود، مفهوم «منحنی تراز» است. مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x,y,۰)$ در صفحهٔ xy را به طوری که $f(x,y) = c$ یک **منحنی تراز f** می‌گوییم (شکل ۲.۱.۷ را ببینید). روشن است که هر منحنی تراز f تصویر قائم یک اثر f بر صفحهٔ xy است. با استفاده از منحنیهای تراز، می‌توان نمودارهای سه‌بعدی را توسط نمودارهای دوبعدی توصیف کرد.



شکل ۴.۱.۷

۷.۱.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. چند منحنی تراز تابع

$$z = ۴(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲$$

را رسم کنید.

۱.۸.۷ *سطوح تراز*

با وجودی که رسم نمودار توابع دومتغیره به آسانی رسم نمودار توابع یک متغیره نیست، نمودار بسیاری از این توابع را می‌توانیم رسم کنیم. ولی رسم نمودار توابع سه متغیره ممکن نیست، زیرا برای این کار به چهار بعد نیاز است. با این وجود، با استفاده از سطوحی به نام «سطوح تراز» می‌توان اطلاعات مفیدی در مورد توابع سه متغیره به دست آورد. اگر f یک تابع سه متغیره باشد، آنگاه به ازای هر عدد c مجموعهٔ همهٔ نقاط (x,y,z) را به طوری که $f(x,y,z) = c$ یک ***سطح تراز f*** می‌نامیم. به عنوان مثال، اگر $f(x,y,z)$ نمایش دمای نقطهٔ (x,y,z) باشد، آنگاه سطح تراز $f(x,y,z) = c$ سطحی است که دمای تمام نقاط آن مقدار ثابت c است.

به عنوان مثال، سطوح تراز تابع با سه متغیر

$$f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

سطوح $x^۲ + y^۲ + z^۲ = c$ ، و سطوح تراز تابع

$$f(x,y,z) = ۲x + ۳y + z$$

صفحه‌های با معادلهٔ $۲x + ۳y + z = c$ هستند.

همچنین توجه می‌کنیم که نمودار هر تابع دومتغیره چون f ، سطح تراز یک تابع سه متغیره مانند g است. زیرا اگر g را به صورت

$$g(x,y,z)=z-f(x,y)$$

تعریف کنیم، آنگاه

$g(x,y,z)=0$ اگر و تنها اگر $z=f(x,y)$.

بنابراین به ازای $c=0$، سطح تراز $g(x,y,z)=0$ نمودار تابع f با معادلهٔ $z=f(x,y)$ است. به این دلیل، نمودار یک تابع دومتغیره را یک **سطح** یا یک **رویه** می‌نامیم.

برای رسم سطوح تراز، مقطع آن را با صفحه‌های $x=c$ ، $y=c$ و $z=c$ پیدا می‌کنیم. هر یک از این مقاطع را یک ***اثر سطح تراز*** می‌نامیم. مهمترین سطوح تراز سطوح درجهٔ دوم هستند که در زیر مورد بحث قرار می‌گیرند.

۹.۱.۷ سطوح یا رویه‌های درجهٔ دوم

هر سطح درجهٔ دوم نمودار معادله‌ای به صورت

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

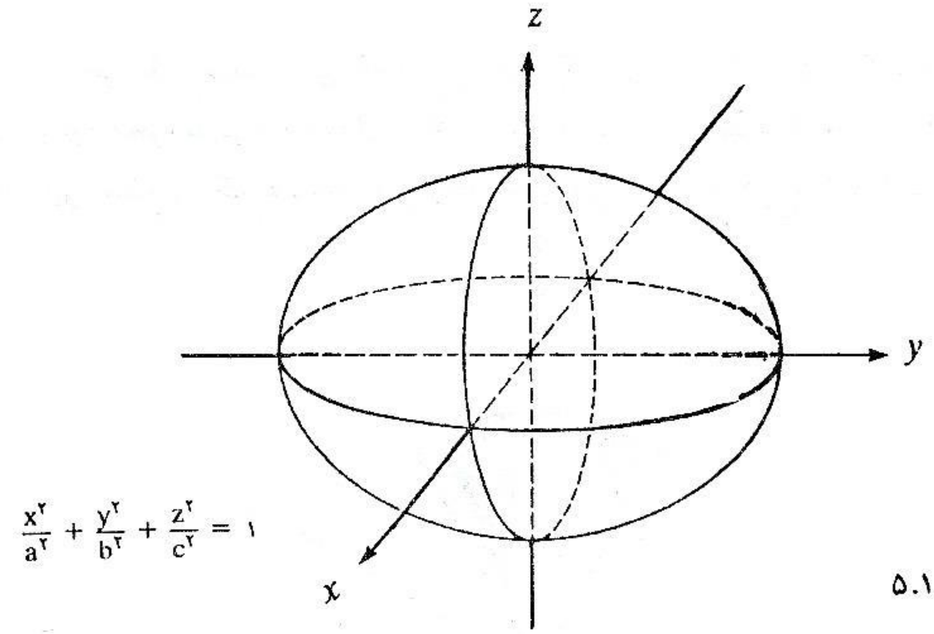
است. سطوح درجهٔ دوم به ۹ دستهٔ اصلی تقسیم می‌شوند. در زیر فرض می‌کنیم a، b، c اعداد حقیقی و مثبت هستند.

(۱) $\boxed{\textbf{بیضیوار:}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$

اثر یک بیضیوار در صفحهٔ $z=k$ ، نمودار معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

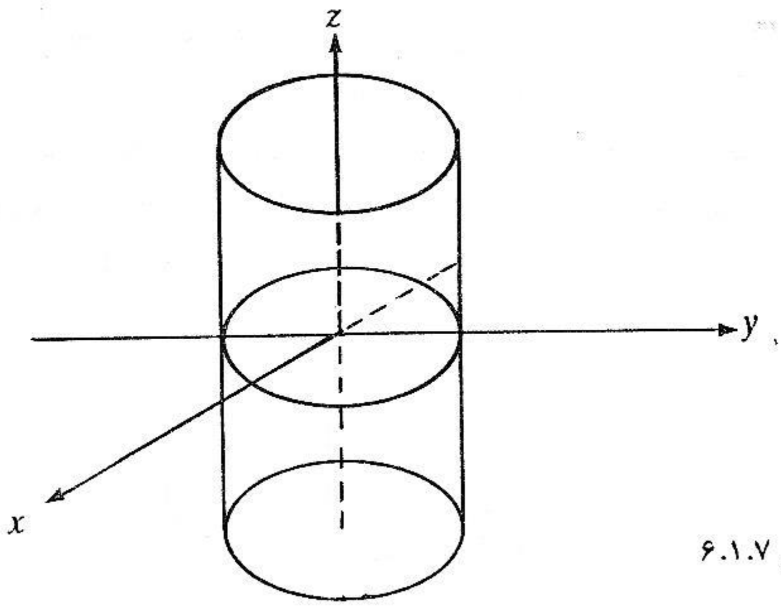
است. این نمودار به ازای $|k|<c$ یک بیضی (یا دایره، اگر $a=b$) و به ازای $|k|=c$ یک نقطه است. اگر $|k|>c$ ؛ آنگاه صفحهٔ $z=k$ نمودار بیضیوار را قطع نمی‌کند. به همین ترتیب اثر بیضی‌گون فوق با صفحه‌های $x=k$ و $y=k$ یک بیضی، یک نقطه یا تهی است. همچنین، اگر $a=b=c$ ، آنگاه نمودار این بیضیوار یک کره به مرکز مبدأ و شعاع a است. (شکل ۵.۱.۷ را ببینید.)



شکل ۵.۱.۷

(۲) استوانهٔ بیضوی: $\boxed{\frac{x^{۲}}{y^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱}$

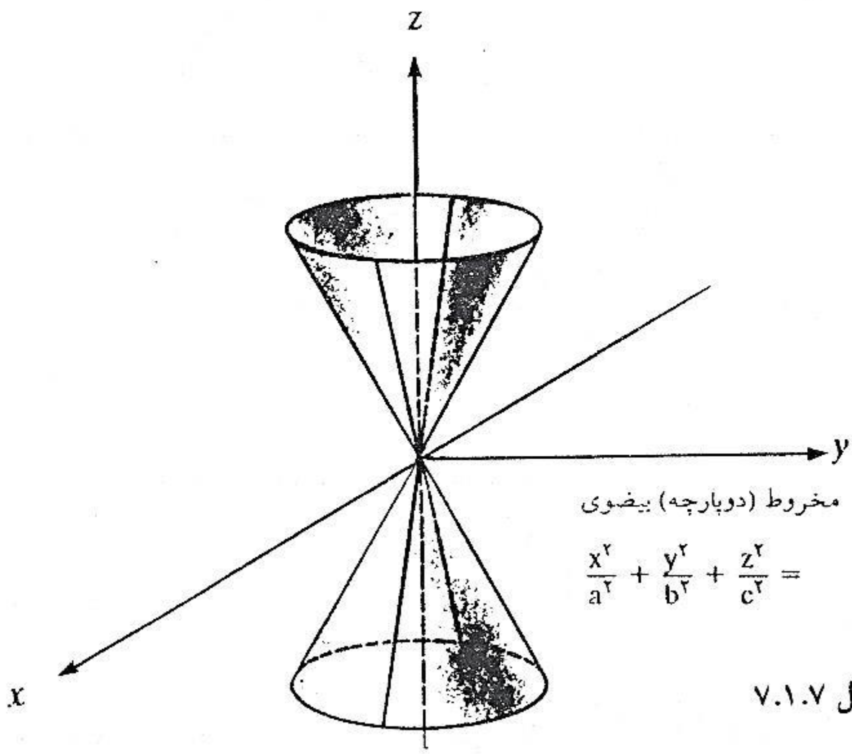
اثر استوانهٔ بیضوی در صفحه‌های $z=k$ بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ است. اگر $a=b$ ، این سطح یک استوانه (مدور) است. (شکل ۶.۱.۷ را ببینید.)



شکل ۶.۱.۷

(۳) مخروط (دوپارچه) بیضوی: $\boxed{\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} - \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۰}$

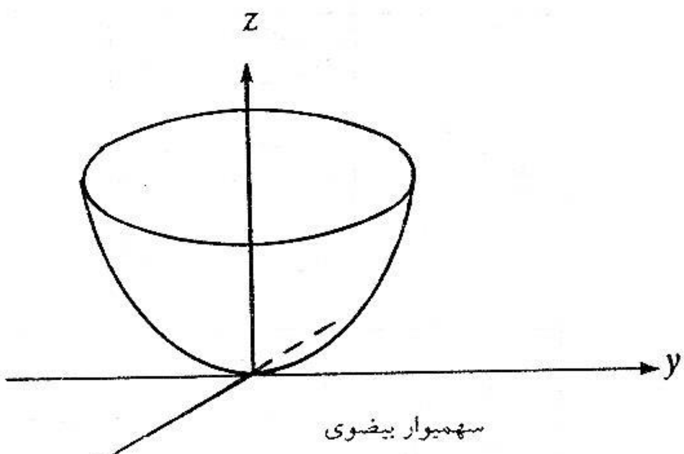
اثرمخروط درصفحه‌های $z=k$ یک‌بیضی (یادایره،اگر $a=b$) یایک‌نقطه (اگر $k=۰$) است. اثر این مخروط در صفحه‌های $x=۰$ و $y=۰$ شامل دو خط که از مبدأ می‌گذرند است. اگر $a=b$ ، این سطح را یک **مخروط (دوپارچهٔ) مدور** می‌نامیم. (شکل ۷.۱.۷ را ببینید.)



شکل ۷.۱.۷

$$\boxed{\text{سهمیوار بیضوی:}\quad \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{z}{c}} \qquad (۴)$$

اثر سهمیوار در هر صفحهٔ $z=k$ یک بیضی (یا دایره، اگر $a=b$)، یک نقطه یا تهی است. اثر این سطح در صفحه‌های $x=۰$ و $y=۰$ یک سهمی است. اگر $a=b$ ، این سطح را یک **سهمیوار مدور** می‌نامیم. (شکل ۸.۱.۷ را ببینید.)

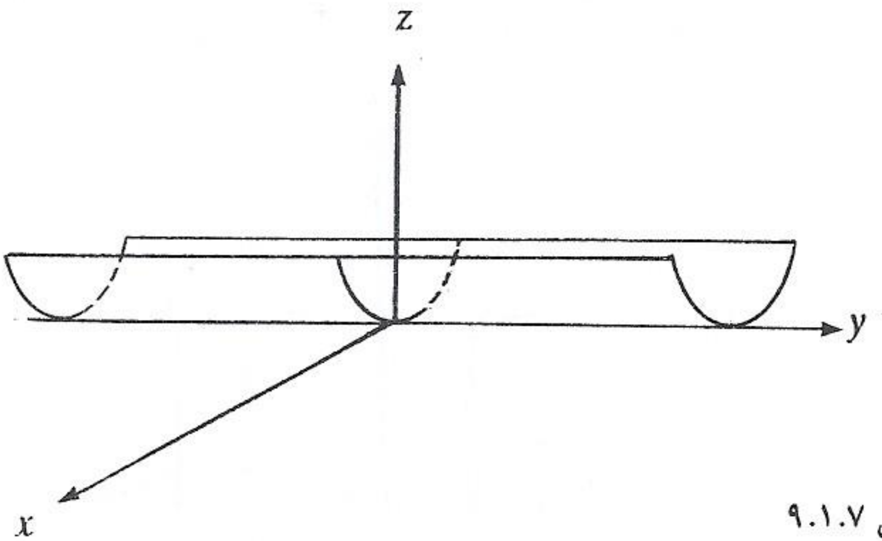


$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{z}{c}$$

شکل ۸.۱.۷

(۵) $\boxed{z = ax^{2}}$ ورق سهموی (یا استوانه سهموی):

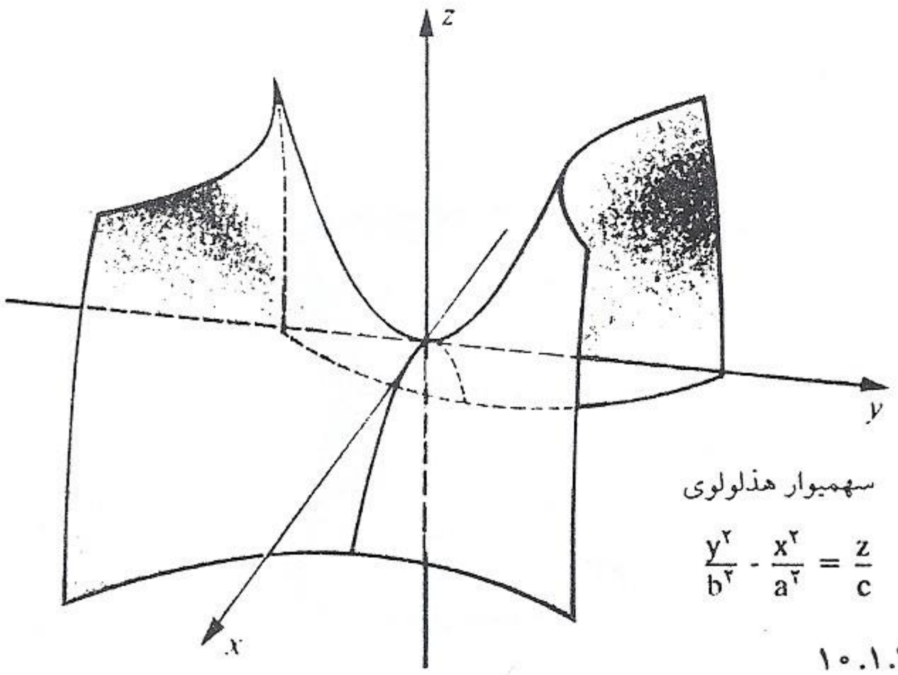
اثر این سطح باصفحهٔ $y=0$ سهمی $y=ax^{2}$ است. (شکل ۹.۱.۷ را ببینید.)



شکل ۹.۱.۷

(۶) **سهمیوار هذلولوی:** $\boxed{\dfrac{y^{2}}{b^{2}}-\dfrac{x^{2}}{a^{2}}=\dfrac{z}{c}}$

اثر این سهمیوار در صفحه‌های $x=0$ و $y=0$ دوسهمی، یک روبه بالا و دیگری روبه پایین است. اثر این سطح در صفحهٔ $z=0$ متشکل از دو خط متقاطع است. اثر آن در هر صفحهٔ دیگر موازی با صفحهٔ xy یک هذلولوی است. نمودار این سطح شبیه به زین اسب است. (شکل ۱۰.۱.۷ را ببینید.)



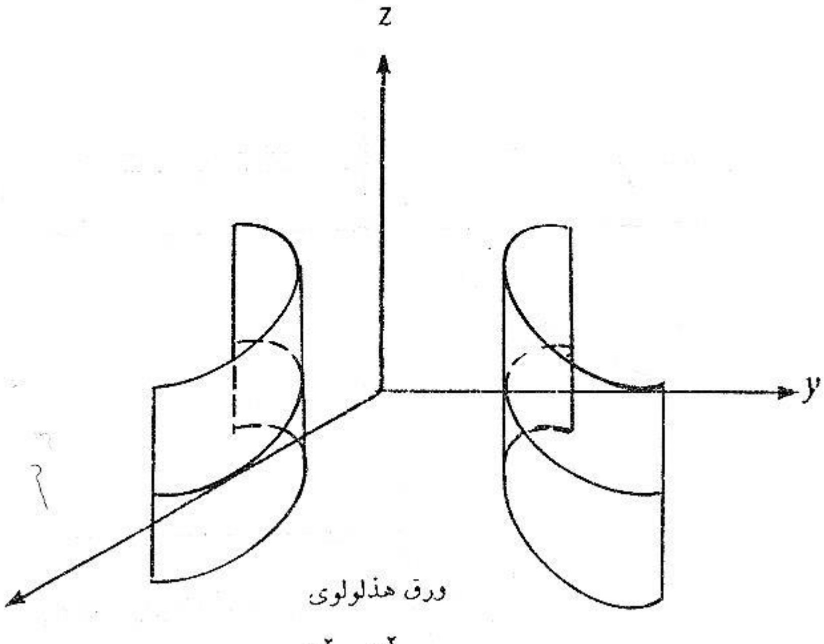
سهمیوار هذلولوی

$$\frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{x^{2}}{a^{2}}=\frac{z}{c}$$

شکل ۱۰.۱.۷

(۷) **ورق هذلولوی** (یا **استوانهٔ هذلولوی دوپارچه**): $\dfrac{y^۲}{b^۲}-\dfrac{x^۲}{a^۲}=۱$

اثر این سطح در هر صفحهٔ $z=k$ هذلولوی $\dfrac{y^۲}{b^۲}-\dfrac{x^۲}{a^۲}=۱$ است. (شکل ۱۱.۱.۷ را ببینید.)



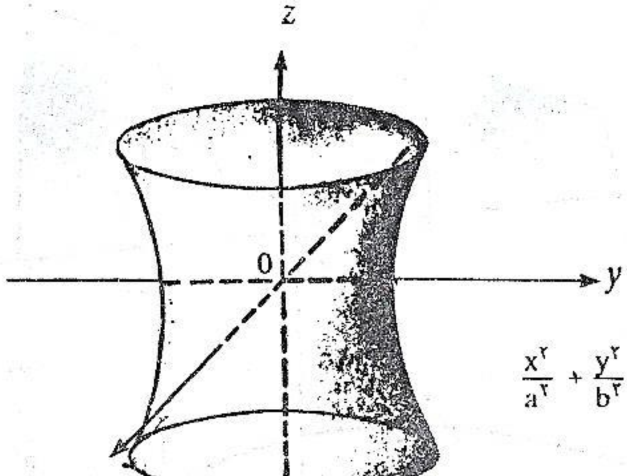
ورق هذلولوی

$\dfrac{y^۲}{b^۲}-\dfrac{x^۲}{a^۲}=۱$

شکل ۱۱.۱.۷

(۸) ورق هذلولیوار یک پارچه: $\dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}-\dfrac{z^۲}{c^۲}=۱$

اثر این ورق در صفحه‌های $x=۰$ و $y=۰$ هذلولی و در صفحه‌های $z=k$ یک بیضی (یا دایره، اگر $a=b$) است. (شکل ۱۲.۱.۷ را ببینید.)



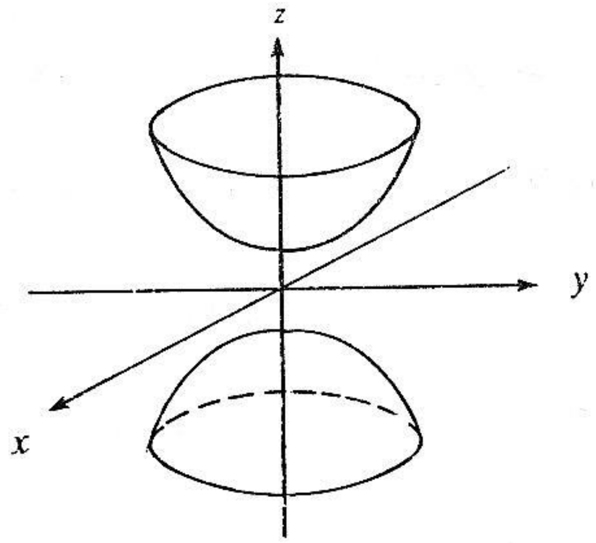
هذلولیوار

$\dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}-\dfrac{z^۲}{c^۲}=۱$

شکل ۱۲.۱.۷

$$\boxed{\text{هذلولیوار دوپارچه:}\ \frac{z^۲}{c^۲}-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱} \qquad (۹)$$

اثر این سطح در صفحه‌های $y=k$ یا $x=l$ یک هذلولی و در صفحه‌های $z=e$ یک بیضی (یا دایره، اگر $a=b$)، یک نقطه یا تهی است. (شکل ۱۳.۱.۷ را ببینید.)



هذلولیوار دوپارچه

$$\frac{z^۲}{c^۲}-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

شکل ۱۳.۱.۷

تمرین ۱.۷

در تمرینهای ۱ تا ۶، دامنهٔ هر یک از توابع داده شده را تعیین کنید.

۱. $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ۲. $f(x,y)=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$

۳. $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲-۲۵}$ ۴. $f(x,y)=\frac{۱}{x+y}$

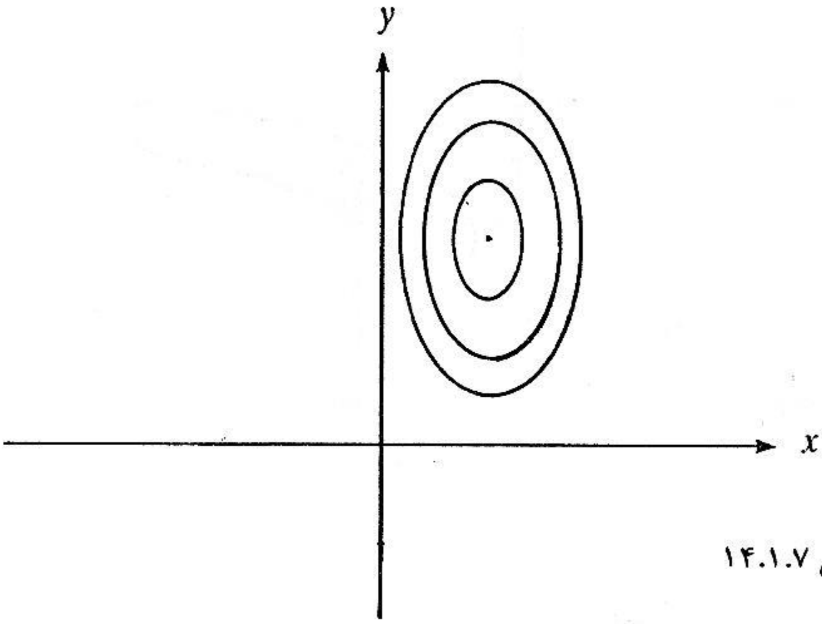
۵. $f(x,y,z)=\sqrt{۱-x^۲-y^۲-z^۲}$ ۶. $g(x,y,z)=\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، منحنیهای تراز $f(x,y)=c$ را به ازای مقادیر داده شده برای c رسم کنید.

۷. $f(x,y)=۳x-y$ ، $c=۲,۳$

۸. $f(x,y)=x^۲+۴y^۲$ ، $c=۱,۴$

۹. $f(x,y)=x^۲-y^۲$ ، $c=-۱,۰,۱$



شکل ۱۴.۱.۷

۲.۷ حد و پیوستگی

فرض کنیم f یک تابع با دو متغیر باشد. به طور شهودی، می‌گوییم که حد f در (a,b) برابر با L است، اگر وقتی نقطهٔ (x,y) به نقطه (a,b) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x,y)$ به L نزدیک و نزدیکتر شود. چون فاصلهٔ نقطهٔ (x,y) از (a,b) برابر است با

$$\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}}\,.$$

پس تعریف زیر را داریم.

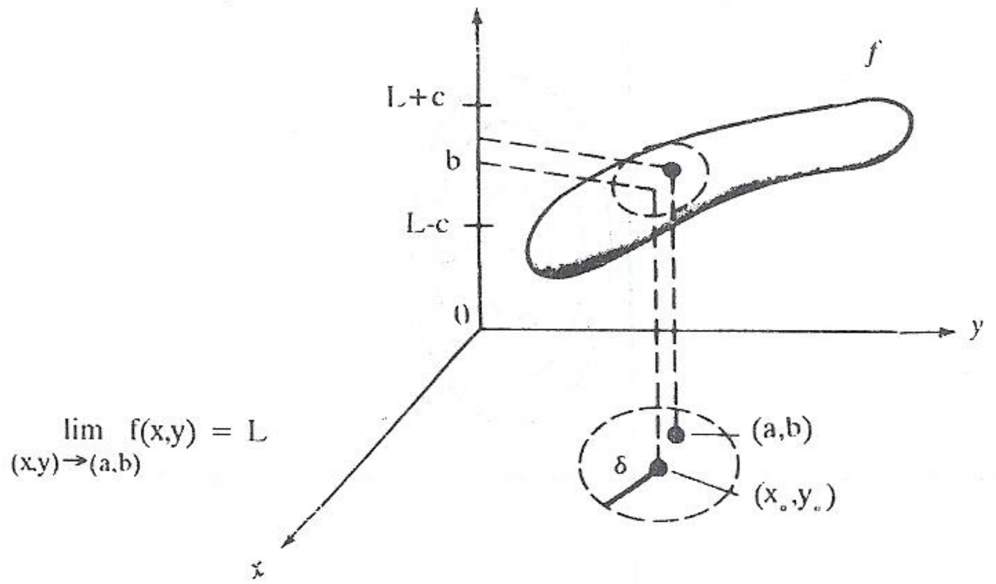
۱.۲.۷ تعریف

فرض کنیم تابع f در درون دایره‌ای به مرکز (a,b)، بجز احتمالاً در (a,b)، معین است. در این صورت عدد L را **حد** f در (a,b) می‌گوییم اگر متناظر با هر $\varepsilon>۰$ یک $\delta>۰$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $۰<\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}}<\delta$ ، آنگاه $|f(x,y)-L|<\varepsilon$. می‌توان نشان داد که عدد L در صورت وجود منحصر به فرد است و در نتیجه آن را به صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

نشان می‌دهیم.

حد توابع سه متغیره نیز به همین صورت تعریف می‌شود. تعبیر هندسی $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ در شکل ۱.۲.۷ رسم شده است. چنین تعبیری برای حد توابع سه متغیره امکان‌پذیر نیست، زیرا در این صورت به چهار بعد نیاز است.



شکل ۱.۲.۷

۲.۲.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y) = x$ و $g(x,y) = y$ ، نشان می‌دهیم که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y=b$$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ ، چون

$$\sqrt{(x-a)^2}\le\sqrt{(x-a^2)+(y-b)^2}$$

پس اگر قرار دهیم $\delta=\varepsilon$، نتیجه می‌گیریم که اگر $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ ، آنگاه

$$|f(x,y)-a| = |x-a| = \sqrt{(x-a)^2}<\delta=\varepsilon.$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a$. حکم دوم نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود.

۳.۲.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} x=a \text{ ،} \quad \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} y=b \text{ ،} \quad \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} z=c$$

۴.۲.۷ قضیه

فرض کنیم $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$. در این صورت

$$\lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,b)=L \quad \text{و} \quad \lim_{(a,y)\to(a,b)} f(a,y)=L \quad . \square$$

۵.۲.۷ مثال. فرض کنیم،

$$f(x,y)=\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}\cdot$$

نشان می‌دهیم که $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد:
داریم

$$\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)} f(x,۰)=\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)}\frac{x^{۲}-۰}{x^{۲}+۰}=۱$$

$$\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)} f(۰,y)=\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)}\frac{۰-y^{۲}}{۰+y^{۲}}=-۱\quad\cdot$$

چون این دو حد یکسان نیستند، پس بنا به قضیهٔ ۴.۲.۷، حد وجود ندارد.

قضیهٔ ۴.۲.۷ بیان می‌کند که اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ ، آنگاه حد f وقتی نقطهٔ (x,y) در مسیرهای $y=b$ یا $x=a$ به نقطهٔ (a,b) میل می‌کند برابر با L است. عکس این قضیه درست نیست (مثال ۸.۲.۷ را ببینید). قضیهٔ کلیتر زیر را بدون اثبات می‌آوریم.

۶.۲.۷ قضیه

اگر حد تابع f وقتی (x,y) بر روی دو منحنی متمایز به (a,b) نزدیک می‌شود متفاوت باشد، آنگاه $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد. □

۷.۲.۷ نتیجه

اگر

$$\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]\neq\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

آنگاه $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد. □

حدمکرر $\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right]$ به این معنی است که ابتدا x را ثابت درنظر می‌گیریم

و $\lim\limits_{y \to b} f(x,y)$ را، در صورت وجود، تعیین می‌کنیم. سپس حد عبارت حاصل را، که تابعی از x است، وقتی $x \to a$ تعیین می‌کنیم.

۸.۲.۷ مثال. فرض‌کنیم $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^{۲}+y^{۲}}$ نشان‌می‌دهیم‌که $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد:

دو منحنی $y=۰$ و $y=x$ را درنظر می‌گیریم. داریم

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(۰,۰)\\ y=۰ \text{ روی}}} f(x,y)=\lim_{x\to۰} f(x,۰)$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{۰}{x^{۲}+۰}=\lim_{x\to۰} ۰=۰\cdot$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(۰,۰)\\ y=x \text{ روی}}} f(x,y)=\lim_{x\to۰} f(x,x)$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}}{x^{۲}+x^{۲}}=\frac{۱}{۲}\cdot$$

چون

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(۰,۰)\\ y=۰ \text{ روی}}} f(x,y)\neq \lim_{\substack{(x,y)\to(۰,۰)\\ y=x \text{ روی}}} f(x,y)$$

در نتیجه، بنا به قضیهٔ ۶.۲.۷، $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد.

توجه می‌کنیم که در این مثال

$$\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)} f(۰,y)=\lim_{x\to۰}\frac{۰}{x+۰}=۰\cdot$$

$$\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)} f(۰,y)=\lim_{y\to۰}\frac{۰}{۰+y^{۲}}=۰\cdot$$

ولی $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد. این مطلب نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ ۴.۲.۷

درست نیست.

همچنین، داریم

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0} 0 \quad (x\neq 0 \quad \text{چون})$$

$$=0.$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$$

$$=\lim_{y\to 0} 0 \quad (y\neq 0 \quad \text{چون})$$

$$=0.$$

بنابراین، عکس نتیجهٔ ۷.۲.۷ درست نیست.

۹.۲.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید

$$f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}.$$

حد تابع f را وقتی (x,y) روی منحنیهای $y=mx$ $(m\neq 0)$ و $y=x^2$ به $(0,0)$ میل می‌کند، تعیین کنید. آیا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود دارد؟

۱۰.۲.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ نشان می‌دهیم که

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx\ \text{روی}}} f(x,y)=\frac{1}{1+m^2}$$

و نتیجه می‌گیریم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد:

داریم

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{روی } y=mx}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{روی } y=mx}} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+m^2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+m^2}=\frac{1}{1+m^2}\cdot$$

پس مقدار این حد به m بستگی دارد و روی دو خط متفاوت، مثلاً $y=x$ و $y=2x$ یکسان نیست. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۶.۲.۷، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

قضیهٔ زیر را، که مشابه با قضیهٔ حدی توابع یک متغیره است، بدون اثبات می‌آوریم.

۱۱.۲.۷ قضیه

اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ وجود داشته باشند، آنگاه

الف)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f+g)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

ب)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f-g)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)-\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

پ)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}(fg)(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

ت)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left(\frac{f}{g}\right)(x,y)=\frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$$

مشروط بر اینکه $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\neq 0$.

به عبارت دیگر، حد مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع به ترتیب برابر است با مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت حدود این دو تابع. □

اگر $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ ، آنگاه $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$

چون $|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}$ ،پس

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

با انتخاب $\delta=\varepsilon$ ، نتیجه می‌گیریم که

اگر $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ ، آنگاه $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$

۱۴.۲.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}$$

نشان دهید که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

۱۵.۲.۷ قضیه

فرض کنیم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$ وتابع یک متغیرهٔ g در L پیوسته باشد. دراین صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y))=g(L).$$

۱۶.۲.۷ مثال

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln\frac{x}{y}$$

را می‌یابیم:

فرض می‌کنیم

$$g(t)=\ln t \qquad f(x,y)=\frac{x}{y}$$

بنابر قضیهٔ حدی ۱۱.۲.۷ (ت)، داریم

$$\lim_{(x,y)\to(e,۱)} f(x,y)=\frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(e,۱)} x}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(e,۱)} y}=\frac{e}{۱}=e\cdot$$

چون تابع g در e پیوسته است، پس

$$\lim_{(x,y)\to(e,۱)} \ln\frac{x}{y}=\lim_{(x,y)\to(e,۱)} g(f(x,y))=g(e)=lne=۱$$

۱۷.۲.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. مقدار $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(e,e)} \ln(xy-e)$ را تعیین کنید.

در زیر پیوستگی توابع دومتغیره را تعریف می‌کنیم.

۱۸.۲.۷ تعریف

می‌گوییم تابع دومتغیرهٔ f در (a,b) **پیوسته** است اگر هر سه شرط زیر برقرار باشند:

الف) $f(a,b)$ وجود داشته باشد.

ب) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

پ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

توجه داشته باشید که اگر یکی از شرایط تعریف فوق برقرار نباشد، آنگاه تابع f در نقطهٔ (a,b) پیوسته نیست.

۱۹.۲.۷ مثال. نشان می‌دهیم که تابع f با تعریف

$$f(x,y)=\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}$$

در $(-۱،۲)$ پیوسته است:

درستی سه شرط پیوستگی را نشان می‌دهیم.

الف) $$f(-۱,۲)=\frac{-۱+۸}{۱+۴}=\frac{۷}{۵}$$

ب) $$\lim_{(x,y)\to(-۱,۲)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(-۱,۲)}\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}=\frac{۷}{۵}$$

۳.۷ مشتق جزئی

فرض کنیم f تابعی $n-$ متغیره باشد. اگر همهٔ متغیرها بجز یکی از آنها را ثابت در نظر بگیریم، تابعی با یک متغیر به دست می‌آید. در این بخش مشتق این توابع یک متغیره را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۳.۷ تعریف

فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد. اگر

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

وجود داشته باشد. می‌گوییم که **مشتق جزئی f نسبت به x** (متغیر اول) وجود دارد. مقدار این حد را مشتق جزئی f نسبت به x در نقطهٔ (x,y) می‌نامیم و آن را با نمادهای $f_x(x,y)$ یا $\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}$ نمایش می‌دهیم.

به همین نحو، مشتق جزئی f نسبت به y در نقطهٔ (x,y) برابر است با

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}=f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر D دامنهٔ f باشد، آنگاه f_x تابعی از دو متغیر x و y و با دامنهٔ

$D' = \{(x,y) \in D|$ وجود داشته باشد $f_x(x,y)\}$

است. این تابع را با $\frac{\delta f}{\delta x}$ نیز نشان می‌دهیم. $f_y = \frac{\delta f}{\delta y}$ نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود. توابع f_x و f_y را مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول f می‌نامیم. نماد δ به جای d برای تمایز مشتقهای جزئی از مشتقهای دیگر به کار رفته است. توجه کنید که برای محاسبهٔ $f_x(x,y)$ ، متغیر y را در $f(x,y)$ ثابت درنظر گرفته و با f همچون تابعی یک متغیره رفتار کرده‌ایم. این مطلب در مورد $f_x(x,y)$ نیز صادق است.

۲.۳.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y) = x^۳y^۲ - ۲xy + ۴y$. مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول f را تعیین می‌کنیم و سپس مقادیر این مشتقها را در نقطهٔ (۱,۲) محاسبه می‌کنیم:

با ثابت در نظر گرفتن y، مشتق f نسبت به x برابر است با

$$f_x(x,y) = \frac{\delta}{\delta x}(x^۳y^۳ - ۲xy + ۴y)$$

$$= ۳x^۲y^۲ - ۲y \cdot$$

بنابراین، $f_x(۱,۲) = ۱۲ - ۴ = ۸$. به همین ترتیب، با ثابت در نظر گرفتن x، مشتق f نسبت به y برابر است با

$$f_y(x,y) = \frac{\delta}{\delta y}(x^۳y^۲ - ۲xy + ۴y)$$

$$= ۲x^۳y - ۲x + ۴ \quad \cdot$$

در نتیجه، $f_y(۱,۲) = ۴ - ۲ + ۴ = ۶ \cdot$

۳.۳.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y,z) = x^۲\cos y + z^۲$. توابع $\frac{\delta f}{\delta x}$ $\frac{\delta f}{\delta y}$ و $\frac{\delta f}{\delta z}$ را مشخص می‌کنیم:

داریم

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(x^۲\cos y + z^۲) = ۲x\cos y \cdot$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}(x^۲\cos y + z^۲) = -x^۲\sin y \cdot$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2\cos y + z^2) = 2z \quad \cdot$$

۴.۳.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $w = x^۳y^۲\sin z + e^{yz}$. توابع $\frac{\delta w}{\delta x}$، $\frac{\delta w}{\delta y}$ و $\frac{\delta w}{\delta z}$ را مشخص کنید.

۱۳.۳.۷ مشتقهای جزئی مرتبه‌های بالاتر

مفهوم مشابهی با مشتقهای مرتبه‌های بالاتر توابع یک متغیره در مورد توابع $n-$ متغیره وجود دارد. اگر f تابعی از متغیرهای x و y باشد، آنگاه f_x و f_y توابعی از متغیرهای x و y هستند. در نتیجه مشتقهای جزئی توابع $f(x)$ و $f(y)$ را نیز می‌توان در نظر گرفت. این مشتقها که مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم نامیده می‌شوند، عبارت‌انداز:

$$f_{xx} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\delta^2 f}{\delta y\, \delta x} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)$$

$$f_{yx} = \frac{\delta^2 f}{\delta x\, \delta y} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)$$

$$f_{yy} = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right).$$

توجه کنید که ترتیب x و y در نمادهای f_{xy} برعکس ترتیب آنها در نماد $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ است.

۱۴.۳.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y) = \sin xy^2$. همهٔ مشتقهای جزئی دوم f را تعیین می‌کنیم: مشتقهای جزئی اول f عبارت انداز:

$f_x(x,y)=y^2\cos xy^2$ و $f_y(x,y)=2xy\cos xy^2$

در نتیجه، مشتقهای جزئی دوم f برابرند با

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\delta}{\delta x}f_x=\frac{\delta}{\delta x}(y^2\cos xy^2)=-y^4\sin xy^2.$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\delta}{\delta x}f_x=\frac{\delta}{\delta y}(y^2\cos xy^2)=2y\cos xy^2-2xy^3\sin xy^2.$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\delta}{\delta x}f_y=\frac{\delta}{\delta x}(2xy\cos xy^2)=2y\cos xy^2-2xy^3\sin xy^2.$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\delta}{\delta y}f_y=\frac{\delta}{\delta y}(2xy\cos xy^2)=2x\cos xy^2-4x^2y^2\sin xy^2.$$

۱۵.۳.۷ مثال. فرض کنیم

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نشان می‌دهیم که $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$:

بنا به تعریف، داریم

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}.$$

چون، به ازای $(x,y)\neq(0,0)$، داریم

$$f_x(x,y)=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

که در آن $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$ و $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$. در نتیجه

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

مقادیر $dx=\Delta x$ و $dy=\Delta y$ را به ترتیب، دیفرانسیل x و y می‌نامیم. در این صورت

$$\boxed{\begin{aligned} df &= f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy \end{aligned}}$$

را **دیفرانسیل کل** f می‌خوانیم. بنابراین،

$$\boxed{\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = df}$$

دیفرانسیل کل توابع با بیش از دو متغیر نیز به همین صورت تعریف می‌شود. یعنی، اگر تابعی با سه متغیر x، y و z باشد، آنگاه

$$\boxed{\begin{aligned} df &= f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy + \frac{\delta f}{\delta z}dz \end{aligned}}$$

۸.۴.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y) = 3x^2 - xy$. با استفاده از df مقدار تقریبی $f(1/01, 1/98)$ را می‌یابیم و آن را با مقدار واقعی‌اش مقایسه می‌کنیم:

چون

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -x \quad , \quad \frac{\delta f}{\delta x} = 6x - y.$$

پس

$$df = \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy$$

$$= (6x - y)dx + (-x)dy.$$

۵.۷ قاعدهٔ زنجیره‌ای

یادآوری می‌کنیم که اگر $u=f(x)$ و $y = g(u) = g(f(x))$ دو تابع با یک متغیر باشند، آنگاه قاعدهٔ زنجیره‌ای بیان می‌کند که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

در این بخش صورتهای این قاعده را برای توابع با دو (یا بیش از دو) متغیر مورد بحث قرار می‌دهیم. توابع مذکور در احکام زیر را مشتقپذیر درنظر می‌گیریم.

۱.۵.۷. *صورتهای قاعدهٔ زنجیره‌ای برای تابع با دو متغیر*

الف) فرض کنیم $z = f(x,y)$، $x = g_1(t)$ و $y = g_2(t)$. در این صورت $z = f(g_1(t)\ ,\ g_2(t))$ و

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{dy}{dt}.$$

ب) فرض کنیم $z = f(x,y)$، $x = g_1(u,v)$ و $y = g_2(u,v)$. در این صورت $z = f(g_1(u,v)\ ,\ g_2(u,v))$ و

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta x}\ \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta y}\ \frac{\delta y}{\delta u}$$

$$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\delta z}{\delta x}\ \frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta z}{\delta y}\ \frac{\delta y}{\delta v}.$$

همتای قواعد زنجیره‌ای برای توابع با بیش از دو متغیر مشابه فرمولهای فوق‌اند.

۲.۵.۷ مثال. فرض کنیم $z = x^2e^y$، $x = \sin t$ و $y=t^3$. در این صورت $\frac{dz}{dt}$ را پیدا می‌کنیم:

بنابر صورت (الف) قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y}\ \frac{dy}{dt}$$

$$= 2x\,e^y \cos t + x^2 e^y\,(3t^2)$$

$$= 2(\sin t)e^{t^3}\cos t + 3\sin^2 t\,e^{t^3}t^2.$$

۵.۵.۷ مثال. فرض کنیم $z = x\ln y$، $x = u^{۲} + v^{۲}$، $y = u^{۲} - v^{۲}$. عبارتهای $\frac{\delta z}{\delta u}$ و $\frac{\delta z}{\delta y}$ را برحسب u و v می‌نویسیم:

داریم

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta u}$$

$$= (\ln y)(۲u) + (\frac{x}{y})(۲u)$$

$$= ۲u\ln y + \frac{۲xu}{y}$$

$$= ۲u\ln(u^{۲} - v^{۲}) + \frac{۲u(u^{۲} + v^{۲})}{u^{۲} - v^{۲}}.$$

$$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta y}$$

$$= \ln y(۲v) + (\frac{x}{y})(-۲v)$$

$$= ۲v\ln(u^{۲} - v^{۲}) - \frac{۲v(u^{۲} + v^{۲})}{u^{۲} - v^{۲}}.$$

۶.۵.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $w = \sqrt{x} + y^{۲}z^{۳}$، $x = ۱ + u^{۲} + v^{۲}$، $y = uv$ و $z = ۳u$. عبارتهای $\frac{\delta w}{\delta u}$ و $\frac{\delta w}{\delta v}$ را برحسب u و v بنویسید.

۷.۵.۷ مثال. فرض کنیم $z = f(u-v\ ,\ v-u)$. نشان می‌دهیم که

$$\frac{\delta z}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta v} = ۰:$$

فرض می‌کنیم $x = u-v$ و $y = v-u$. در این صورت $z = f(x,y)$. حال داریم

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta u}$$

$$=\frac{\delta z}{\delta x}(۱)+\frac{\delta z}{\delta y}(-۱)=\frac{\delta z}{\delta x}-\frac{\delta z}{\delta y}\cdot$$

$$\frac{\delta z}{\delta v}=\frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta v}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta v}$$

$$=\frac{\delta z}{\delta x}(-۱)+\frac{\delta z}{\delta y}(۱)=-\frac{\delta z}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot$$

بنابراین،

$$\frac{\delta z}{\delta u}+\frac{\delta z}{\delta v}=۰\cdot$$

۸.۵.۷ مشتقگیری ضمنی

با استفاده از مشتقهای جزئی فرمول سادهای برای مشتقگیری ضمنی به دست میآید. فرض کنیم تابع $y=f(x)$ به طور ضمنی توسط معادلهٔ $F(x,y)=۰$ داده شده است. اگر $\frac{\delta F}{\delta y}\neq ۰$ و $\frac{\delta F}{\delta x}$ وجود داشته باشد، آنگاه قاعدهٔ زنجیرهای فرمول سادهای برای محاسبهٔ $\frac{dy}{dx}$ به دست میدهد. فرض میکنیم که

$$z=F(u,y)\text{ ، }u=x\quad,\quad y=f(x)\cdot$$

چون $z=F(x,f(x))=۰$، پس $\frac{dz}{dx}=۰$ و لذا بنابر ۱.۵.۷ (الف) داریم

$$۰=\frac{dz}{dx}=\frac{\delta z}{\delta u}\frac{du}{dx}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{\delta z}{\delta u}(۱)+\frac{\delta z}{\delta y}f'(x)\cdot$$

بنابراین، اگر $\frac{\delta z}{\delta y}\neq ۰$ آنگاه (چون $u=x$)،

$$\boxed{f'(x)=-\frac{\delta z/\delta x}{\delta z/\delta y}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}}$$

۹.۵.۷ مثال. فرض کنید تابع $y=f(x)$ در معادلهٔ

$$y^{۴}+۳y-۴x^{۲}-۵x-۱=۰$$

صدق کند. y' را پیدا می‌کنیم:

اگر قرار دهیم

$$F(x,y)=y^{۴}+۳y-۴x^{۳}-۵x-۱$$

آنگاه

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{-۱۲x^{۲}-۵}{۴y^{۳}+۳}.$$

۱۰.۵.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $x^{۳}+y^{۳}=۲xy$. عبارت $\frac{dy}{dx}$ را تعیین کنید.

۱۱.۵.۷ تذکر. فرض کنیم تابع با دو متغیر $z=f(x,y)$ در معادلهٔ $F(x,y,z)=۰$ صدق کند. قرار می‌دهیم $w=F(u,v,z)$، $u=x$، $v=y$، $z=f(x,y)$. در این صورت، چون $w=۰$ پس بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$۰=\frac{\delta w}{\delta x}=\frac{\delta w}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta w}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta w}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta x}$$

$$=\frac{\delta w}{\delta u}(۱)+\frac{\delta w}{\delta v}(۰)+\frac{\delta w}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta x}.$$

بنابراین، اگر $\frac{\delta w}{\delta z}\neq ۰$ آنگاه (چون $u=x$)

$$\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{\delta w/\delta x}{\delta w/\delta z}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

به همین ترتیب، به دست می‌آوریم

$$\boxed{\frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}}$$

$$\frac{\delta w}{\delta v}=\frac{\delta w}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta v}+\frac{\delta w}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta v}+\frac{\delta w}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta v}$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲v)+۲yz^{۳}(u)+۳y^{۲}z^{۲}(۰)$$

$$=\frac{v}{\sqrt{۱+u^{۲}+v^{۲}}}+۵۴u^{۵}v \cdot$$

۱۰.۵.۷. قرار می‌دهیم $F(x,y)=x^{۳}+y^{۳}-۲xy$. بنابراین

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{۳x^{۲}-۲y}{۳y^{۲}-۲x}=\frac{۲y-۳x^{۲}}{۳y^{۲}-۲x}\cdot$$

۱۲.۵.۷. فرض می‌کنیم $F(x,y,z)=x^{۲}z^{۲}+xy^{۲}-z^{۳}+۴yz-۵$ در نتیجه

$$\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{۲xz^{۲}+y^{۲}}{۲x^{۲}z-۳z^{۲}+۴y}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{۲xy+۴z}{۲x^{۲}z-۳z^{۲}+۴y}\cdot$$

۶.۷ مشتق سوئی و گرادیان

در ۱۱.۳.۷، ملاحظه کردیم که مشتقهای جزئی یک تابع، آهنگ تغییر تابع را در جهت خطوط موازی با محورهای مختصات تعیین می‌کنند. در اینجا می‌خواهیم آهنگهای تغییر را در جهت خطوطی که لزوماً موازی با محورهای مختصات نیستند مورد بحث قرار دهیم.

۱.۶.۷ تعریف

فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x، y و $\vec{u}=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$ برداری واحد باشد. **مشتق سوئی** f در نقطهٔ (x,y) **و در جهت** u را با $D_uf(x,y)$ نمایش می‌دهیم و به صورت

$$D_uf(x,y)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+ha_۱,y+ha_۲)-f(x,y)}{h}$$

تعریف می‌کنیم (مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد).

توجه می‌کنیم که اگر $\vec{u}=\vec{i}$، آنگاه

$$D_u f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=f_x(x,y)$$

و اگر $\vec{u}=\vec{j}$، آنگاه

$$D_u f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=f_y(x,y)\cdot$$

بنابراین، مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول f حالتهای خاص مشتق سوئی (در جهت محورها) هستند. قضیهٔ زیر فرمولی برای محاسبهٔ مشتق سوئی فراهم می‌آورد.

۲.۶.۷ قضیه
اگر f در (x,y) مشتقپذیر و $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ برداری واحد باشد، آنگاه

$$D_u f(x,y)=f_x(x,y)a_1+f_y(x,y)a_2\cdot$$

۳.۶.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y)=6-3x^2-y^2$ و $\vec{u}=(1/\sqrt{2})\vec{i}-(1/\sqrt{2})\vec{j}$ مقدار $D_u f(1,2)$ را می‌یابیم:
توجه می‌کنیم که $\vec{u}$ یک بردار واحد است. چون

$$D_u f(x,y)=f_x(x,y)\frac{1}{\sqrt{2}}+f_y(x,y)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(-6x)\frac{1}{\sqrt{2}}+(-2y)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\cdot$$

در نتیجه

$$D_u f(1,2)=(-6)\frac{1}{\sqrt{2}}+(-4)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}\cdot$$

در تعریف $D_uf(x,y)$، $\vec{u}$ برداری واحد است. **مشتق سوئی f در جهت بردار دلخواه و ناصفر $\vec{a}$** برابر است با $D_uf(x,y)$، که در آن

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

۴.۶.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y) = xy^۲$ و $\vec{a} = \vec{i} - ۲\vec{j}$. مشتق سوئی f در نقطهٔ $(-۳,۱)$ را در جهت $\vec{a}$ می‌یابیم:

در اینجا $|\vec{a}| = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$ و در نتیجه

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{i} - \frac{۲}{\sqrt{۵}}\vec{j}.$$

چون

$$f_y(x,y) = ۲xy \quad \text{و} \quad f_x(x,y) = y^۲$$

در نتیجه

$$D_uf(-۳,۱) = f_x(-۳,۱)\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) + f_y(-۳,۱)\left(\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\right)$$

$$= ۱\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) + (-۶)\left(\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\right) = \frac{۱۳}{۵}\sqrt{۵}$$

۵.۶.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $f(x,y) = x^۲ - ۴xy$. مشتق سوئی $D_uf(x,y)$ را در جهت بردار $\vec{u} = \cos\frac{\pi}{۳}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{۳}\vec{j}$ بیابید. مقدار $D_uf(-۳,۲)$ را محاسبه کنید.

مشتق سوئی تابع سه متغیرهٔ f در نقطهٔ (x,y,z) و در جهت بردار واحد $\vec{u} = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$ عبارت است از

$$D_uf(x,y,z) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+ha_۱, y+ha_۲, z+ha_۳) - f(x,y,z)}{h}.$$

همچنین اگر f در (x,y,z) مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\boxed{D_u f(x,y,z)=f_x(x,y,z)a_1+f_y(x,y,z)a_2+f_z(x,y,z)a_3}$$

۷.۶.۶ مثال. فرض کنیم $f(x,y,z)=xe^{y^2z}$ مشتق سوئی f در نقطهٔ $(2,1,0)$ را در جهت بردار $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$ می‌یابیم:

چون

$$|\vec{a}|=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2$$

پس

$$\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\cdot$$

مشتقهای جزئی f عبارت‌انداز

$$f_z(x,y,z)=xy^2e^{y^2z}\quad,\quad f_y(x,y,z)=2xyze^{y^2z}\quad,\quad f_x(x,y,z)=e^{y^2z}\cdot$$

بنابراین،

$$D_u f(2,1,0)=f_x(2,1,0)\left(\frac{1}{2}\right)+f_y(2,1,0)\left(\frac{-1}{2}\right)+f_z(2,1,0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=1\left(\frac{1}{2}\right)+0\left(\frac{-1}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\quad\cdot$$

۷.۶.۷ گرادیان

عبارت $D_uf(x,y)$ را می‌توان به صورت حاصلضرب عددی دو بردار نوشت:

$$D_u f(x,y)=f_x(x,y)a_1+f_y(x,y)a_2$$

$$=(f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j})\cdot(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})\cdot$$

بردار اول در کاربردهای فیزیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از این رو نماد و نام مشخصی به این بردار داده شده است.

۸.۶.۷ تعریف
بردار $f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$ را **گرادیان** تابع دو متغیرهٔ f در نقطهٔ (x,y) می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}\cdot$$

نماد ∇f را «دل f» می‌خوانیم.

گرادیان تابع سه متغیره نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

۹.۶.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y)=x^{3}y^{2}$. گرادیان f را در نقطهٔ $(-1,2)$ محاسبه می‌کنیم: داریم

$$\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$$

$$=3x^{2}y^{2}\vec{i}+2x^{3}y\vec{j}\cdot$$

در نتیجه

$$\nabla f(-1,2)=12\vec{i}-4\vec{j}\cdot$$

۱۰.۶.۷ مسألهٔ نمونه‌ای. فرض کنید $f(x,y)=\sin xy$. گرادیان f را در نقطهٔ $(1,\frac{\pi}{3})$ پیدا کنید. سپس مشتق سوئی f در این نقطه را در جهت بردار $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}$ محاسبه کنید.

۱۱.۶.۷ مثال. فرض کنیم $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}$. گرادیان f را در نقطهٔ $(2\sqrt{2},2\sqrt{2},-3)$ می‌یابیم: چون

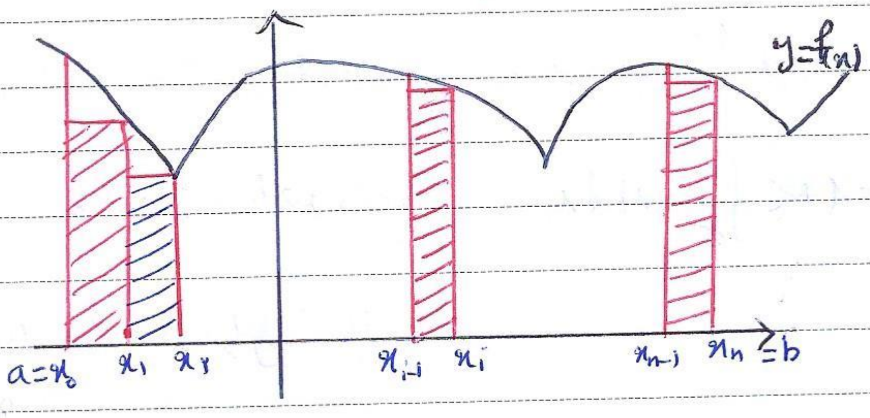
$$\nabla f(x,y,z)=f_x(x,y,z)\vec{i}+f_y(x,y,z)\vec{j}+f_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$=-\frac{x}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}}\vec{i}-\frac{y}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}}\vec{j}$$

$$-\frac{z}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}}\vec{k}$$

فصل (۲) انتگرال دوگانه

انتگرال معین: هر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ به صورت زیر داده شده باشد.



بطوری که فاصله $[a,b]$ به n زیر بازه زیر تقسیم شده باشد، $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,2,\dots,n$

و داشته باشیم $x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<b=x_n$

همچنین $f(x_i)$ مقدار f بر نقطه x_i از بازه i ام یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ باشد و $\Delta_i x=x_i-x_{i-1}$

آنگاه اگر A بیانگر سطح زیر منحنی باشد خواهیم داشت

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x$$

تعریف: با مفروضات فوق مقدار عبارت زیر را مجموع ریمان می نامیم

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x$$

همچنین مقدار عبارت زیر را حد مجموع ریمان می نامیم

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x$$

اگر حد فوق موجود باشد در این صورت تابع $f(x)$ انتگرال پذیر باشد و انتگرال معین تابع f بر بازه $[a,b]$ که با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نمایش داده می شود برابر است با

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x$$

خواص انتگرال معین: اگر توابع f و g در بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد خواهیم داشت:

۱- k عدد ثابت است

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

۲) $$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

۳) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

۴) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

۵) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

۶- اگر $a<c<b$ باشد داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها:

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد نقطه‌ای مانند c در این بازه موجود است به طوری که داریم

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

$f(c)$ را مقدار متوسط تابع f در بازه $[a,b]$ می‌نامیم.

قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

فرض کنید دو تابع $F(x)$ و $f(x)$ در بازه بسته $[a,b]$ چنان باشند که در این بازه همواره داشته باشیم. در این صورت داریم:

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال: مقدار انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int_1^2 (x^2+x)\,dx$$

حل:

$$\int_1^2 (x^2+x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} = \frac{14+9}{6} = \frac{23}{6}$$

Year. Month. Date. ( )

تعمیم تعریف انتگرال ساده به انتگرال دوگانه :

انتگرال دوگانه تابع دو متغیره کراندار (یعنی رویه محدود است) $f(x,y)$ روی ناحیه بسته و کراندار $D\subset\mathbb{R}^2$

واقع در دامنه تابع f طی مراحل زیر تعریف می‌گردد.

۱) تقسیم (یا افراز) ناحیه D به n مستطیل توسط خطوط موازی محور xها و محور yها

۲) نشان دادن اندازه مساحت هر قطعه افراز با $\Delta A_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ ، $(i=1,\dots,n)$

۳) انتخاب نقطه دلخواه (x_i^*, y_i^*) از هر قطعه ΔA_i ، $(i=1,\dots,n)$

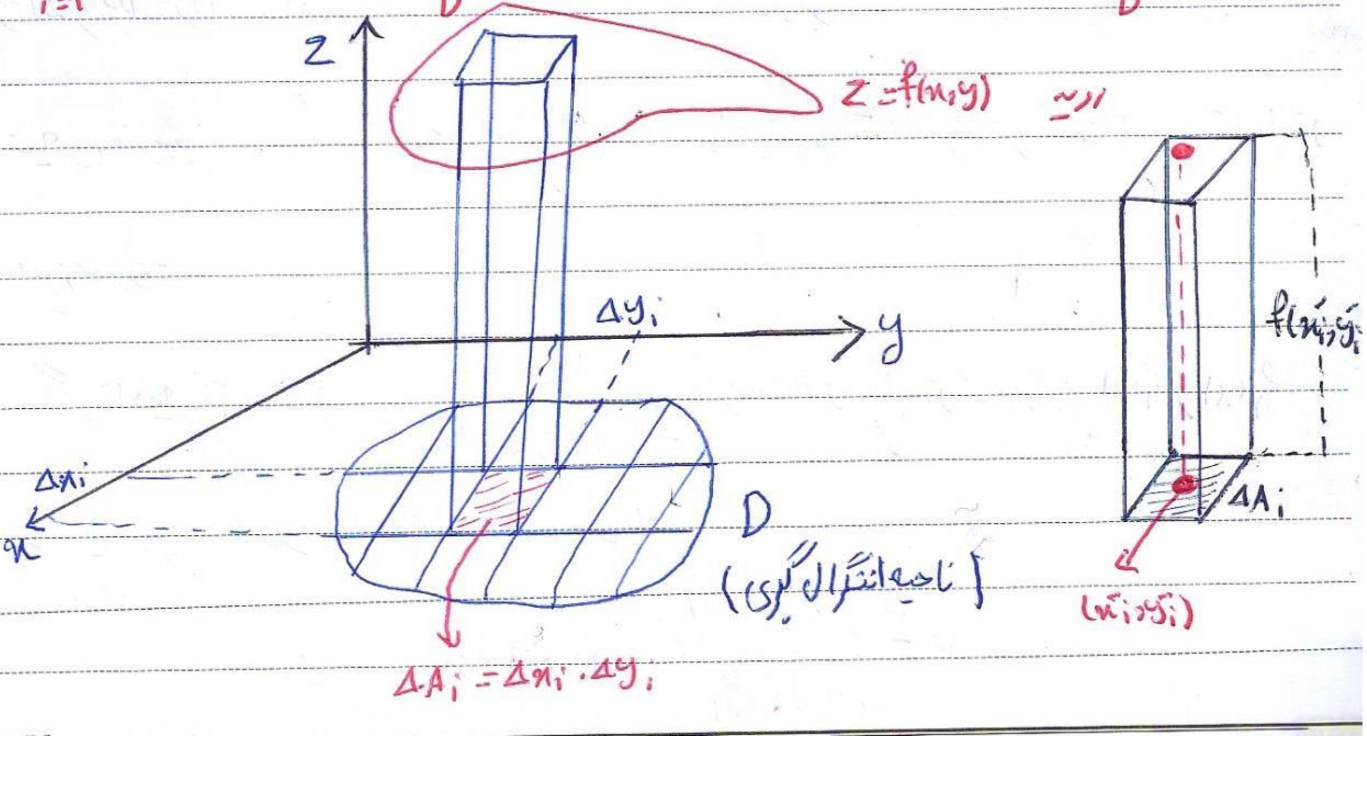
۴) محاسبه حجم مکعب مستطیل گونه که برابر است با $f(x_i^*, y_i^*)\cdot\Delta A_i$ ، $(i=1,\dots,n)$

۵) تشکیل (مجموع ریمان) که عبارت است از مجموع حجم مکعب مستطیل‌ها $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\cdot\Delta A_i$

۶) حدگیری از مجموع ریمان وقتی که ($n\to\infty$) در صورت وجود حد، عدد به دست آمده را با

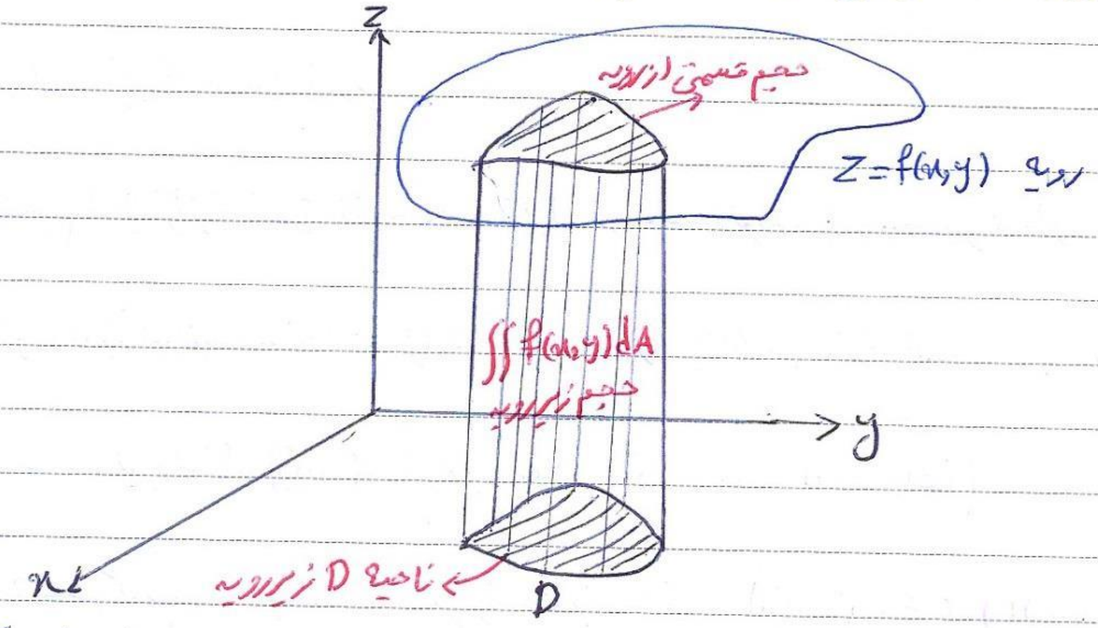
نشان می‌دهیم: $\iint_D f(x,y)\,dA$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\cdot\Delta A_i = \iint_D f(x,y)\,dA$$



تعبیر هندسی: هرگاه تابع $f(x,y)$ در D پیوسته و مثبت باشد $\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ نشانگر حجم زیر رویه

به معادله $z=f(x,y)$ و بالای ناحیه D خواهد بود.



یادآوری: در عمل برای محاسبه $\int_a^b f(x)\,dx$ بنا به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال از

روش پادمشتق گیری استفاده می‌گردد.

در محاسبه عملی انتگرال دوگانه از (قضیه فوبینی-تونلی) استفاده می‌شود. این قضیه هر انتگرال

دوگانه را به انتگرال ساده‌ی مکرر با دو ترتیب مختلف (برحسب x و y) تبدیل می‌کند.

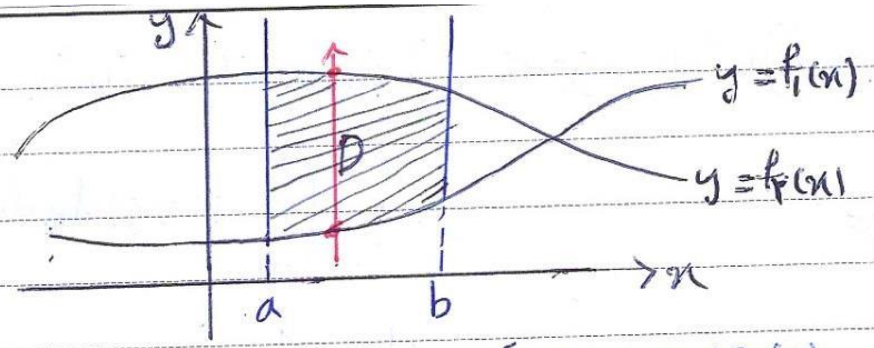
قضیه‌ی فوبینی-تونلی: فرض کنید $f(x,y)$ در ناحیه‌ی بسته و کراندار $D\subset\mathbb{R}^2$ پیوسته باشد

در این صورت

① اگر ناحیه D به شکل $\begin{cases} a\le x\le b \\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\end{cases}$ توصیف شده باشد که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$

دو تابع پیوسته در $[a,b]$ هستند، آنگاه

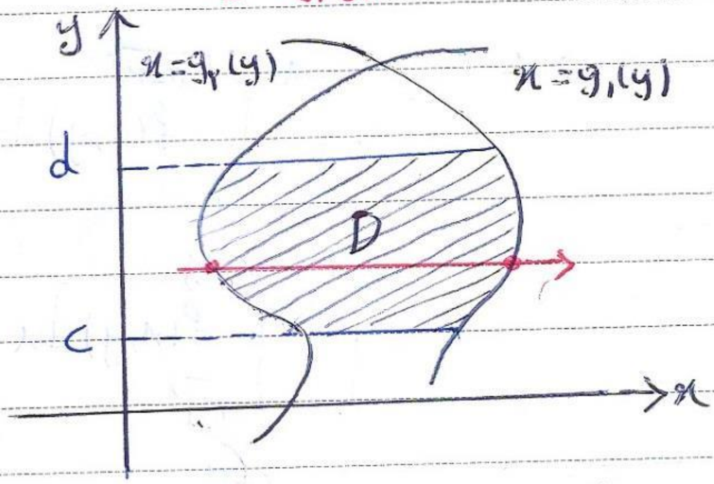
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



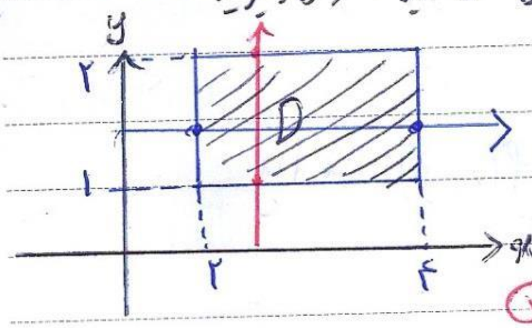
۲) اگر ناحیه D به شکل $\begin{cases} g_1(y) \le x \le g_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$ توصیف شده باشد که در آن $g_1(y)$ و $g_2(y)$ در

تابع پیوسته در $[c,d]$ هستند آنگاه:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



مثال: از تابع $f(x,y) = x^2 - y^3 + x^2y^3$ مستطیل شکل زیر انتگرال بگیرید.



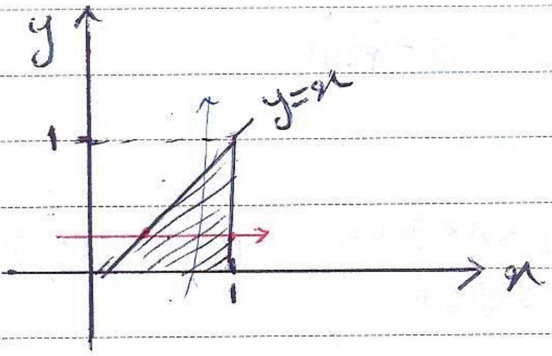
$$\iint (x^2 - y^3 + x^2y^3)\,dA \underset{\text{قضیه فوبینی}}{=}$$

۱) $$\int_1^2 \int_2^4 (x^2 - y^3 + x^2y^3)\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - y^3x + \frac{x^3}{3}y^3\right)\Big|_2^4\,dy = \int_1^2 \left(\frac{64}{3} - 4y^3 + \frac{64}{3}y^3 - 2y^3 + \frac{8}{3}y^3\right)dy$$

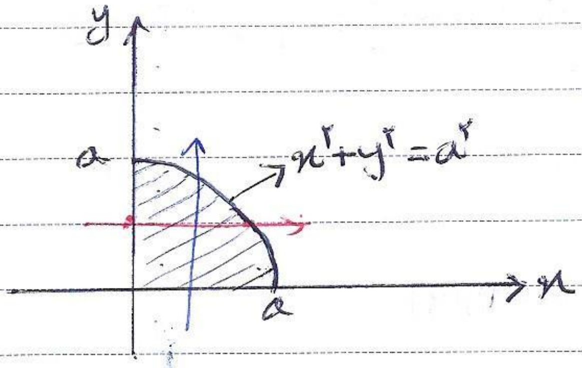
یا ۲) $$\int_2^4 \int_1^2 (x^2 - y^3 + x^2y^3)\,dy\,dx = \dots$$

مثال: حدود انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ را با دو ترتیب انتگرال‌گیری بنویسید.



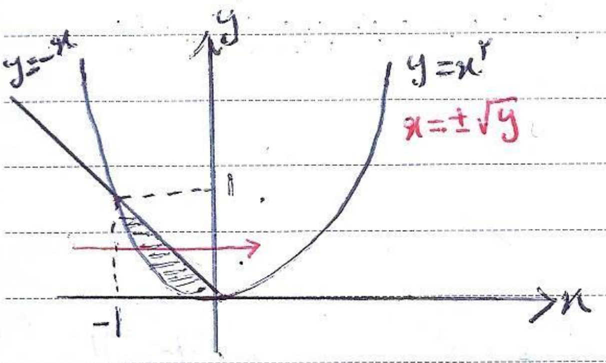
$$\int_0^1\int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$$



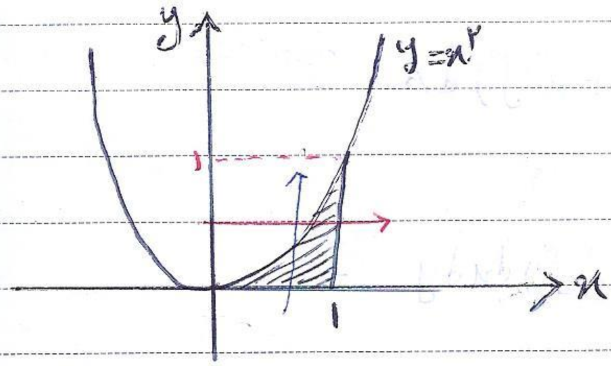
$$\int_0^a\int_0^{+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$



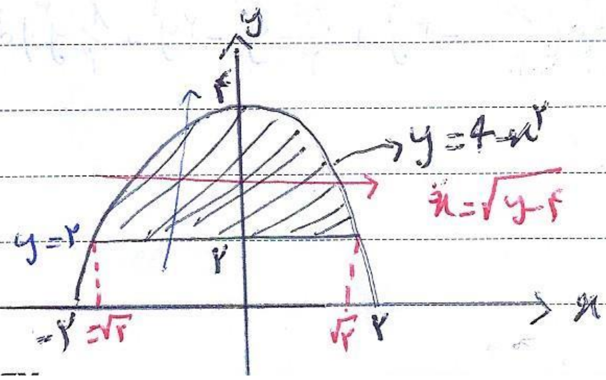
$$\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_{-1}^0\int_{x^2}^{-x} f(x,y)\,dy\,dx$$



$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

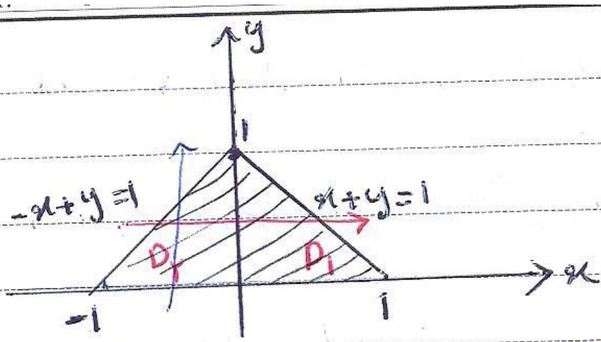


تقاطع

$$\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=2 \end{cases} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$\int_2^4\int_{-\sqrt{4-y}}^{+\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_2^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$



$$\int_0^1\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

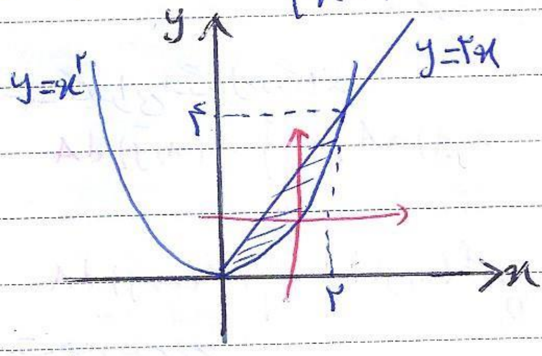
$$\int_{-1}^1\int_0^{?} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dy\,dx=\iint_{D_1} f(x,y)\,dy\,dx+\iint_{D_2} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{-1}^0\int_0^{1+x} f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال: در $I=\underbrace{\int_0^2\int_{x^2}^{2x}}_{D\ \text{ناحیه}} dy\,dx$ ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید.

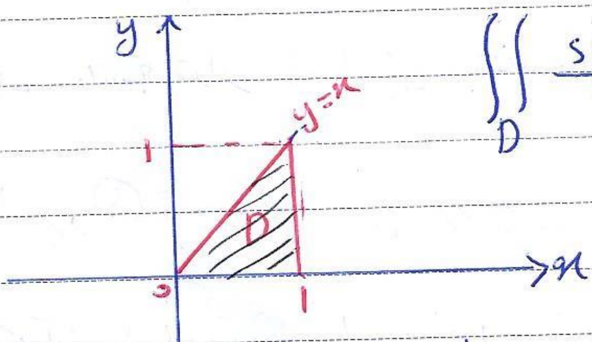
حل: ابتدا حدود داده شده را معین می‌کنیم $\begin{cases} y=x^2\\ y=2x\end{cases}$ و $\begin{cases} x=0\\ x=2\end{cases}$ شکل را رسم می‌کنیم



$$I=\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

مثال: انتگرال دوگانه $I=\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dA$ را روی مثلث D به رئوس $\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ حل کنید.

حل: ابتدا شکل را رسم می‌کنیم سپس حدود مناسب و نامناسب انتگرال‌گیری را انتخاب می‌کنیم



$$\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dA=$$

نامناسب: $\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$ غیرقابل ادامه

مناسب: $\int_0^1\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx=$

$$=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,y\Big|_0^1 dx=\int_0^1\left(\frac{\sin x}{x}x-0\right)dx=-\cos x\Big|_0^1=-\cos(1)+\cos(0)$$

$$=1-\cos(1)$$

خلاصه : برای حل یک انتگرال دوگانه مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

۱ـ تشخیص ترتیب مناسب انتگرال گیری با توجه به شکل ناحیه انتگرال گیری و تابع انتگرال

۲ـ نوشتن حدود مناسب

۳ـ حل دو انتگرال ساده مکرّر

خواص انتگرال دوگانه :

خاصیت خطی بودن انتگرال دوگانه : (۱) $\iint_D (f+g)(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$

(۲) $\iint_D (\lambda f)(x,y)\,dA = \lambda \iint_D f(x,y)\,dA$ (λ عدد ثابت)

(۳) $\forall (x,y)\in D : f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \geq 0$

خاصیت یکنوایی انتگرال دوگانه

(۴) $\forall (x,y)\in D : f(x,y) \geq g(x,y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$

(۵) $D = D_1 \cup D_2$ (اجتماع نامتداخل) $\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$

یعنی در مرز همپوشیده باشد

خاصیت جمع پذیری

((کاربردهای انتگرال دوگانه))

۱ـ محاسبه حجم زیر رویه‌ها

۲ـ محاسبه مساحت نواحی مسطح (در صفحه xoy)

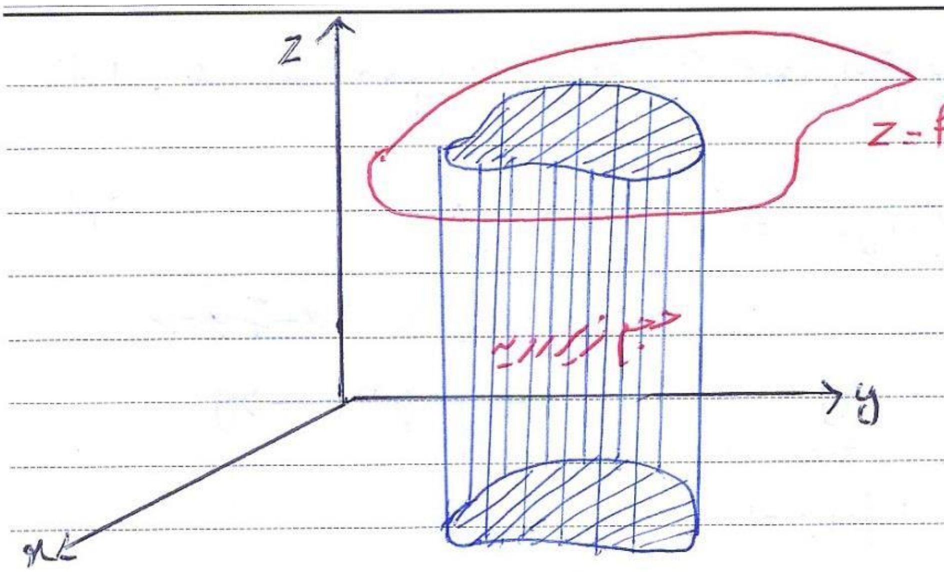
۳ـ محاسبه مقدار متوسط تابع دو متغیره $f(x,y)$

۴ـ سایر کاربردهای فیزیکی

کاربرد (۱) : محاسبه حجم زیر رویه پیوسته $z=f(x,y)$ و بالای ناحیه D (از صفحه xoy)

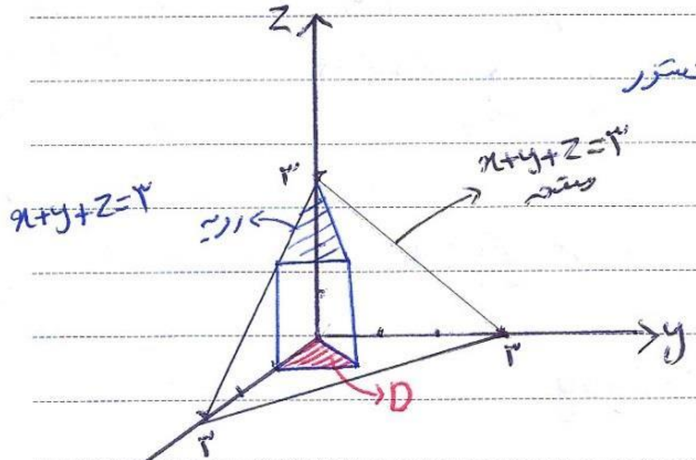
که آن را (سایه رویه) اجزا صفحه می‌نامیم از فرمول زیر انجام می‌گیرد که نتیجه مستقیم تعریف انتگرال دوگانه است.

$$\text{حجم زیر رویه} = \iint_{\text{سایه رویه}} (\text{رویه})\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA$$



تذکر: رویه در نظر گرفته شده باید در راستای محور z فقط یک لایه یا یک جداره باشد به عبارت دیگر در معادله $z=f(x,y)$ باید f یک تابع باشد.

مثال: مطلوب است محاسبه منشوری که قاعده بالای آن رویه صفحه $x+y+z=3$ و قاعده پایین آن مثلثی است در صفحه xoy محدود به خطوط $y=x$ ، $x=1$ ، $y=0$



حل: حجم منشور: $\iint_{\text{سایه}} (\text{رویه})\, dA$

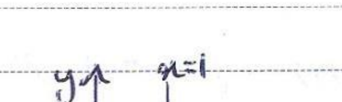
$$= \iint_{\text{مثلث } D} (3-x-y)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 (3-x-y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - yx\right]_y^1 dy$$

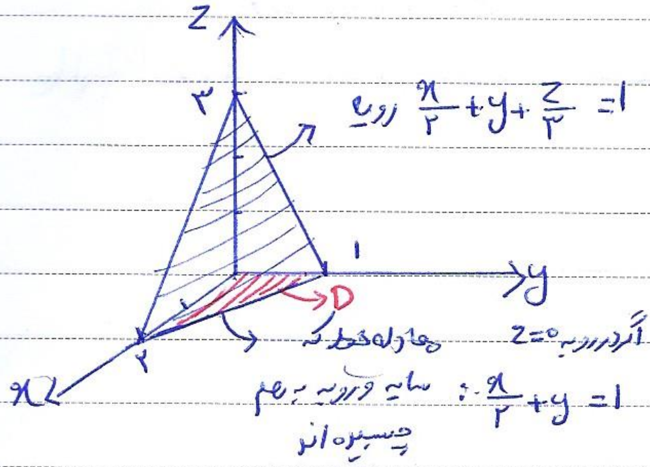
$$= \int_0^1 \left[\left(3-\frac{1}{2}-y\right) - \left(3y - \frac{y^2}{2} - y^2\right)\right] dy$$

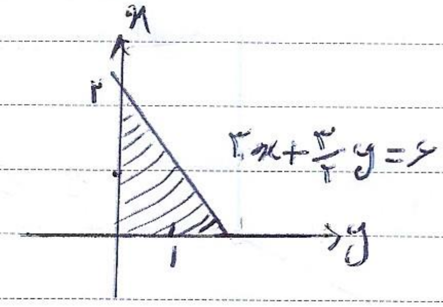
$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3y^2}{2}\right) dy = \cdots$$



مثال ۲: مطلوب است حجم چهار وجهی (هرمی) که صفحه $\frac{x}{2}+y+\frac{z}{3}=1$ را در $\frac{1}{8}$ اول ایجاد می‌کند.

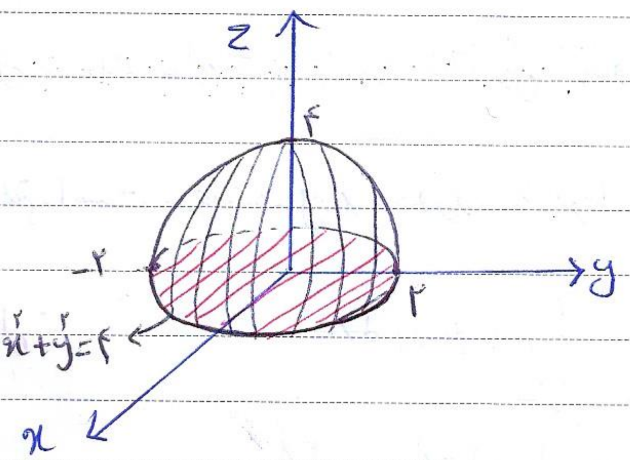
حل:



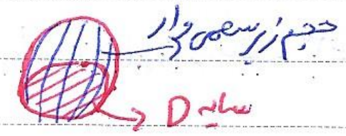


$$\text{حجم هرم}: \iint_{\text{سایه}} (\text{رویه})\,dA = \iint_{\text{مثلث}} 3\left(1-\frac{x}{2}-y\right)dA = 3\int_0^2\int_0^{1-\frac{x}{2}}\left(1-\frac{x}{2}-y\right)dy\,dx$$

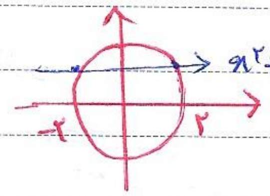
مثال ۳: مطلوب است حجم بین سهمی وار $z=4-x^2-y^2$ و صفحه xoy



حل:



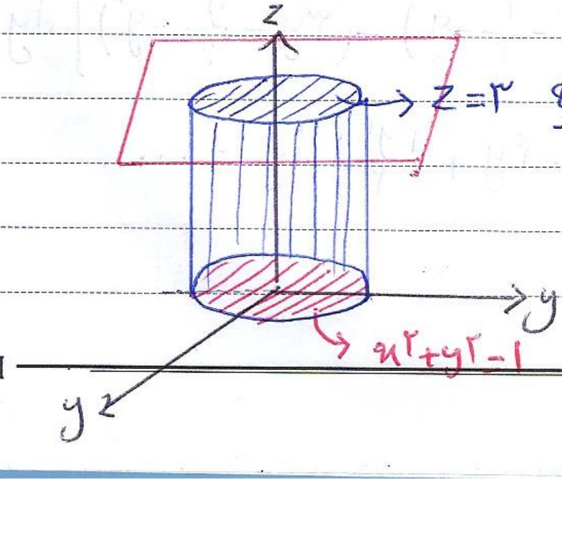
برای تشخیص سهمی رویه با $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ را می‌گیریم.



$$\text{حجم زیر سهمی وار}: \iint_{\text{سایه}} (\text{رویه})\,dA = \iint_{x^2+y^2\le 4} (4-x^2-y^2)\,dA =$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

مثال ۴: مطلوب است حجم محدود به استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=0$, $z=3$



$$\text{حجم استوانه}: \iint_{\text{سایه}} \text{رویه}\,dA =$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1 \\ \text{دایره}}} 3\,dA = 3\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\,dx\,dy = \dots$$

حال با تعریف افراز P یعنی با حدگیری از عبارت فوق وقتی $(n \to \infty)$ داریم:

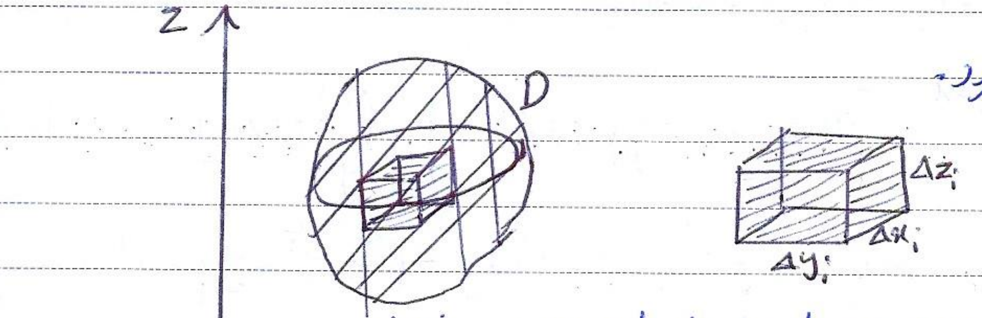
$$\text{عدد} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \text{میانگین تابع پیوسته } f(x) \text{ در } [a,b]$$

با تعمیم فرمول فوق به توابع دو متغیره داریم:

$$\frac{\iint_D f(x,y)\,dA}{D \text{ مساحت}} = \text{میانگین تابع پیوسته } f(x,y) \text{ در ناحیه بسته و کراندار } D$$

انتگرال سه‌گانه (Triple Integral)

انتگرال سه‌گانه تابع سه متغیره کراندار $f(x,y,z)$ روی ناحیه بسته و کراندار $D \subset R^3$ واقع در دامنه تابع f طی مراحل زیر تعریف می‌گردد.



1) تقسیم ناحیه D به n مکعب مستطیل توسط خطوط موازی سه محور مختصات

2) نشان دادن اندازه حجم هر قطعه افراز با $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i \; (i=1,\dots,n)$

3) انتخاب نقطه دلخواه (x_i^*, y_i^*, z_i^*) از هر قطعه ΔV_i ، $(i=1,\dots,n)$

4) تشکیل مجموع ریمان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \Delta V_i$

5) حدگیری از مجموع ریمان وقتی $(n \to \infty)$ در صورت وجود حد عدد به دست آمده را با $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$ نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \Delta V_i = \iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

تذکر: حد فوق در صورت پیوستگی تابع $f(x,y,z)$ در D موجود است. (ریمان انتگرال پذیر)

تعبیر هندسی: از مرحله (۴) به بعد از مراحل فوق شکل هندسی قابل تجسم نمی‌باشد زیرا می‌دانیم که نمودار تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ قابل تجسم هندسی نمی‌باشد. ولی می‌توان با قرار دادن $f\equiv 1$ در تعریف فوق به کاربرد هندسی زیر رسید.

کاربرد هندسی:
$$\text{حجم } D = \iiint_D 1\, dV$$

محاسبه عملی: در اینجا نیز قضیه فوبینی، مشابه انتگرال دوگانه برقرار است. این قضیه هر انتگرال سه‌گانه را به سه انتگرال ساده مکرر با ۶ ترتیب مختلف (برحسب x و y و z) تبدیل می‌کند.

خواص انتگرال سه‌گانه: خواص خطی بودن، یکنواختی و جمع پذیری روی دامنه نیز مشابه دوگانه در انتگرال سه‌گانه نیز برقرار است.

کاربردها: ① محاسبه حجم ناحیه‌های بسته و کراندار در فضا (این تنها کاربرد هندسی انتگرال سه‌گانه است)

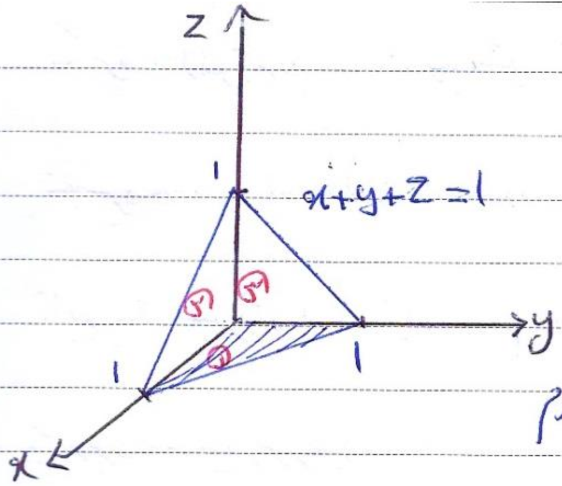
② میانگین تابع سه متغیره پیوسته $f(x,y,z)$ در ناحیه بسته و کراندار $D\subset \mathbb{R}^3$ از فرمول زیر به دست می‌آید که تعمیمی از حالت دو متغیره است

$$\text{میانگین} = \frac{\iiint_D f(x,y,z)\, dV}{\text{حجم } D}$$

③ سایر کاربردهای فیزیکی

مثال: حجم چهاروجهی (یا هرم) را که توسط صفحه $x+y+z=1$ در $\frac{1}{8}$ اول ایجاد شده را با انتگرال دوگانه و سه‌گانه به دست آورید.

حل :



$$\text{حجم جرم} = \iiint_{\text{جرم}} 1\,dv$$

$$\iiint_{\text{مثلث }①}^{1-x-y}_{0} dz\,dA$$

$$\iiint_{\text{مثلث }②}^{1-x-z}_{0} dy\,dA$$

$$\iiint_{\text{مثلث }③}^{1-y-z}_{0} dx\,dA$$

حجم جرم با انتگرال سه‌گانه $\iiint_{\text{جرم}} 1\,dv \quad \iiint_{\text{مثلث}}\int_0^{(1-x-y)} 1\,dz\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-x-y} dz\,dx\,dy$

$$\iiint_{\text{مثلث در } xoz}\int_0^{1-x-z} 1\,dy\,dz\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-z} dy\,dz\,dx$$

کاربردهای فیزیکی انتگرال چندگانه :

① فرض کنید تابع $f(x,y)$ نشانگر چگالی جرم یک ورقه مسطح D در صفحه xoy باشد در این صورت

D جرم کل : $M = \iint_D f(x,y)\,dA$

D مختصات مرکز جرم : $\bar{x} = \dfrac{\iint_D x f(x,y)\,dA}{M}$ و $\bar{y} = \dfrac{\iint_D y f(x,y)\,dA}{M}$

گشتاور اول : $M_x = \iint_D x f(x,y)\,dA$ و $M_y = \iint_D y f(x,y)\,dA$

② مشابهاً با معلوم بودن تابع چگالی جرم $f(x,y,z)$ می‌توان مفاهیم فوق را برای یک جسم صلب

D در فضا به دست آورد.

تمرین: انتگرال های مکرر زیر را محاسبه کنید؟

1) $\int_0^1 \int_{-1}^{1} x\,dy\,dx$

حل: $I = \int_0^1 xy \Big|_{-1}^{1} dx = \int_0^1 2x\,dx = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} \Big|_0^1 = (1^2) - 0 = 1$

2) $\int_0^1 \int_x^{x^2} dy\,dx$

حل: $I = \int_0^1 (x^2 - x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$

3) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} y\,dx\,dy$

حل: $I = \int_0^2 xy \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^2 y\sqrt{4-y^2}\,dy = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(4-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

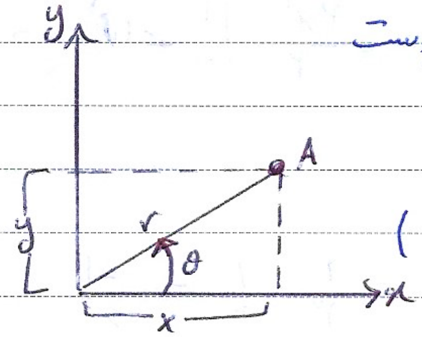
۴) فرض کنید R ناحیه محدود به خطوط $x=2$ ، $x=3$ ، $y=4$ و $y=6$ باشد انتگرال دوگانه

$\iint_R (x+y)\,dA$ را محاسبه کنید؟

حل: $I = \int_2^3 \int_4^6 (x+y)\,dy\,dx = \int_2^3 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_4^6 dx = \int_2^3 (6x + 18 - 4x - 8)\,dx = 15$

انواع مختصات در صفحه :

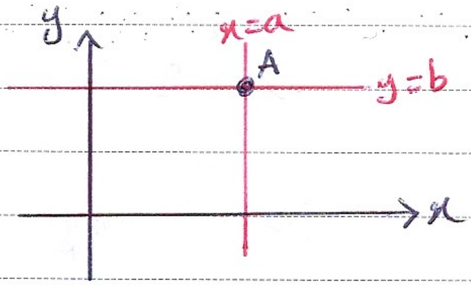
یادآوری : در صفحه برای تعیین مکان یک نقطه از مختصات دکارتی (x,y) یا مختصات قطبی (r,θ) استفاده می‌شود. روابط زیر بین این دو مختصات برقرار است



$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\text{Arctan}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$
(مختصات قطبی برحسب دکارتی)

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$
(مختصات دکارتی برحسب قطبی)

تذکر: زاویه θ که در جهت مثلثاتی با محور x^+ سنجیده می‌شود برای یک نقطه منحصر به فرد نیست و می‌تواند مقادیر مثبت و منفی داشته باشد.



حالات خاص :

$x=a$ معادله خط موازی محور y ها گذرنده از $x=a$

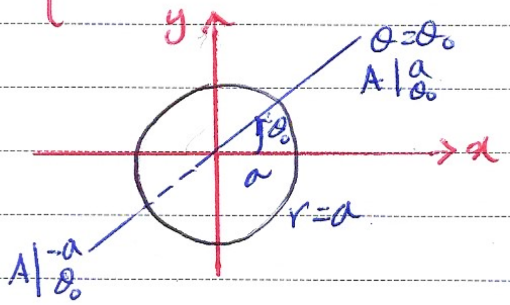
$y=b$ معادله خط موازی محور x ها و گذرنده از $y=b$

$\xleftarrow{\text{قطع}}$ $A:\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$

$r=a$ معادله محیط یک دایره به مرکز مبدأ به شعاع a

$\theta=\theta_0$ معادله نیم خط گذرنده از مبدأ با زاویه θ از محور x^+

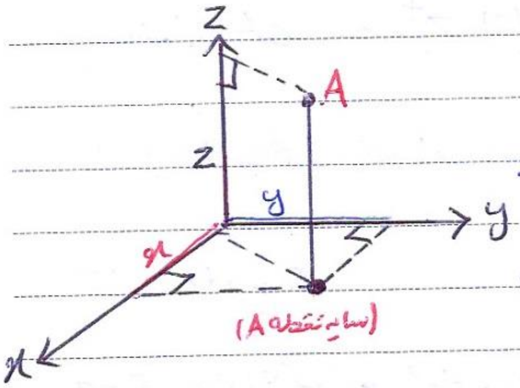
$\xleftarrow{\text{قطع}}$ $A:\left|\begin{matrix}r\\\theta_0\end{matrix}\right.$



انواع مختصات در فضا:

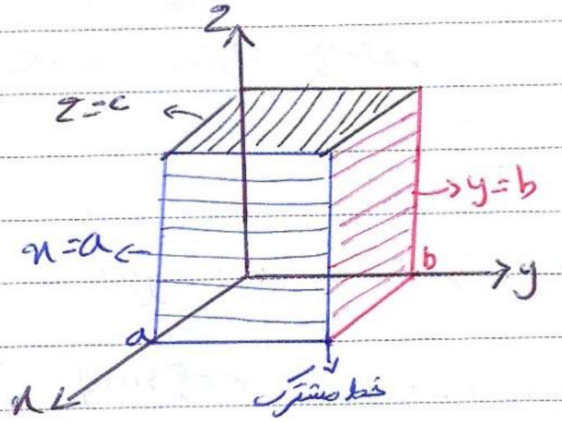
۱- مختصات دکارتی (x, y, z) ۲- مختصات استوانه‌ای (r, θ, z)

۳- مختصات کروی (ρ, ϕ, θ)



مختصات دکارتی (x,y,z): ابتدا سایه نقطه A در فضا را در صفحه xoy می‌یابیم و سپس مختصات دکارتی (x,y) از سایه A را بدست می‌آوریم مختص z همان ارتفاع A خواهد بود.

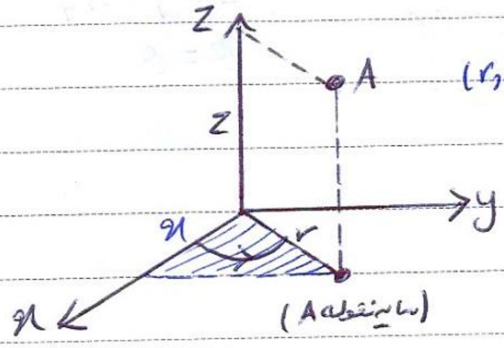
حالات خاص:



$A: \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$

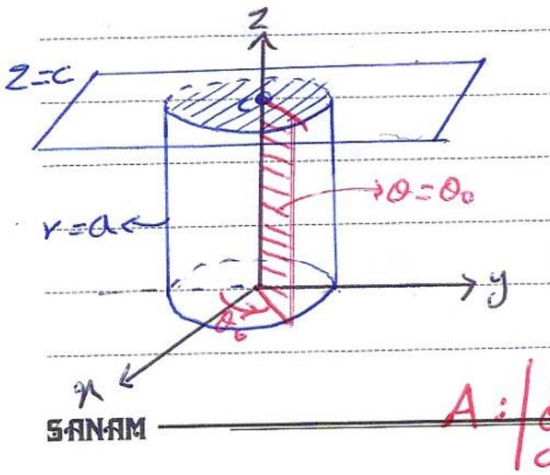
- $x=a$ معادله صفحه‌ای موازی yoz از گذرنده $x=a$
- $y=b$ معادله صفحه موازی xoz از گذرنده $y=b$
- $z=c$ معادله صفحه‌ی موازی xoy از گذرنده $z=c$

مختصات استوانه‌ای (r,θ,z):



ارتفاع z برای نقطه A با مختصات دکارتی مشترک است و (r,θ) عبارتند از مختصات قطبی سایه نقطه A در صفحه xoy

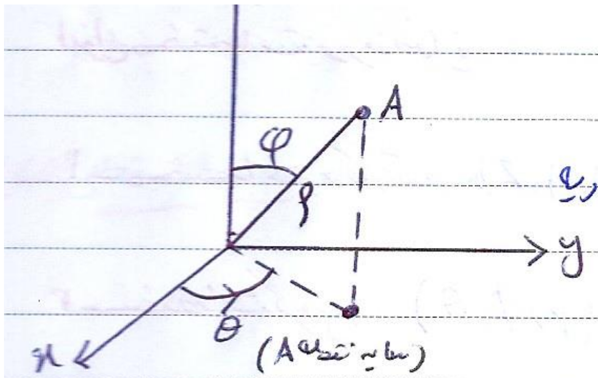
از تلفیق اینها به مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) برای نقطه A در فضا می‌رسیم. (حالات خاص)



- $r=a$ معادله استوانه به شعاع a و مرکز مبدا موازی محور zها
- $\theta=\theta_0$ معادله نیم صفحه از زاویه θ_0 با محور x^+ گذرنده از محور zها
- $z=c$ معادله صفحه افقی موازی محور xoy

$A: \begin{vmatrix} a \\ \theta_0 \\ c \end{vmatrix}$

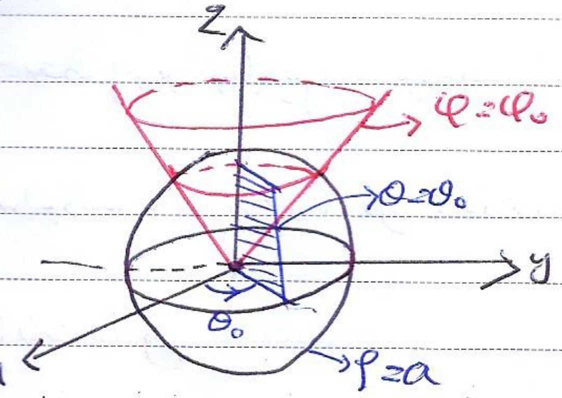
مختصات کروی (ρ,ϕ,θ) :



ρ عبارت است از طول شعاع OA در فضا و ϕ نشانگر زاویه

بین شعاع OA و محور z^+ می‌باشد $0 \le \phi \le \pi$

می‌باشد زاویه θ با مختصات استوانه‌ای نقطه مشترک است و از سایه نقطه در صفحه xOy به دست می‌آید.



حالات خاص :

قطعی

$\rho=a$ معادله کره‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ

$\phi=\phi_0$ معادله مخروط

$\theta=\theta_0$ معادله نیم صفحه

$$A:\left|\begin{matrix} a \\ \phi_0 \\ \theta \end{matrix}\right.$$

روابط بین مختصات دکارتی و کروی و استوانه‌ای :

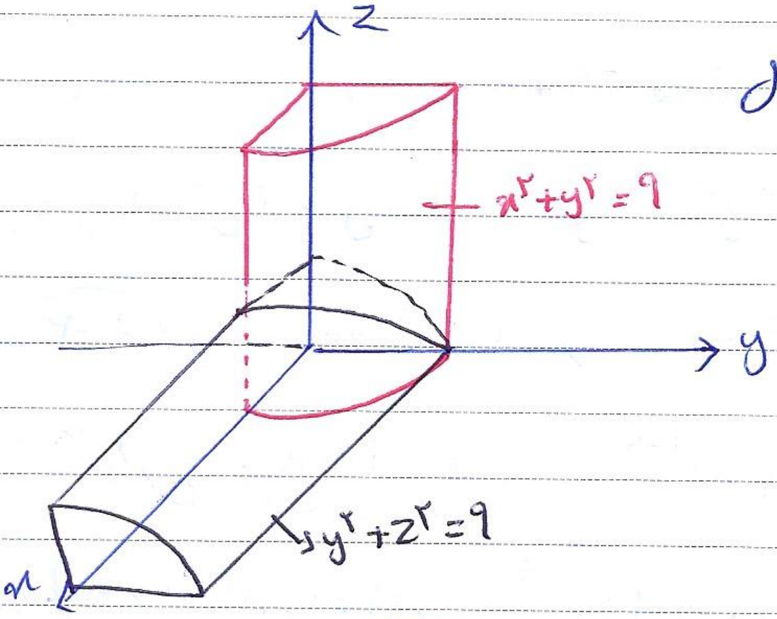
مختصات دکارتی برحسب کروی

$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

مختصات استوانه‌ای برحسب کروی

$$\begin{cases} r=\rho\sin\phi \\ z=\rho\cos\phi \\ \theta=\theta \end{cases}$$

مثال. حجم جسم محدود به سطوح $x^2+y^2=9$ و $y^2+z^2=9$ را محاسبه کنید؟



حل: در یک ربع اول

جسم محدود شکل از بالا به سطح $z=\sqrt{9-y^2}$ و از پایین به دایره $x^2+y^2=9$ محدود است

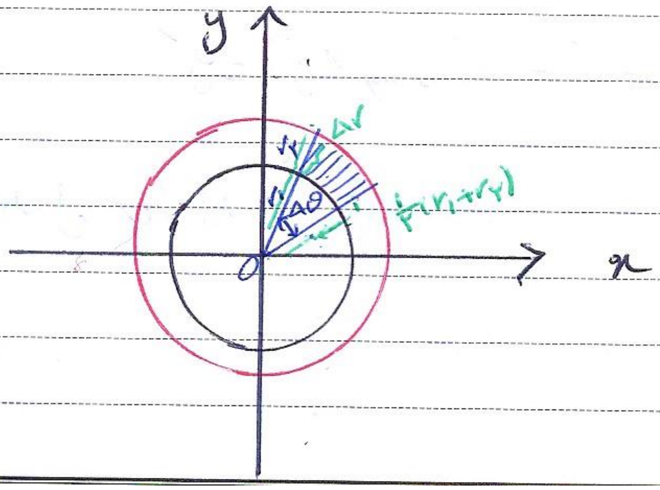
بنابراین حجم این جسم برابر است با

$$V=8\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\sqrt{9-y^2}\,dx\,dy=8\int_0^3 x\sqrt{9-y^2}\,dy$$

$$=8\int_0^3 9-y^2\,dy=8\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^3=144$$

انتگرال دوگانه در مختصات قطبی:

فرض کنیم R ناحیه‌ای بین دو دایره به شعاع‌های r_1 و r_2 باشد.



اگر اندازه زاویه بین دو شعاع برابر $\Delta\theta$ را دارا باشد و $\Delta r = r_2 - r_1$ آنگاه مساحت R برابر است با

$$\Delta A = \frac{1}{2} r_2^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r_1^2 \Delta\theta$$

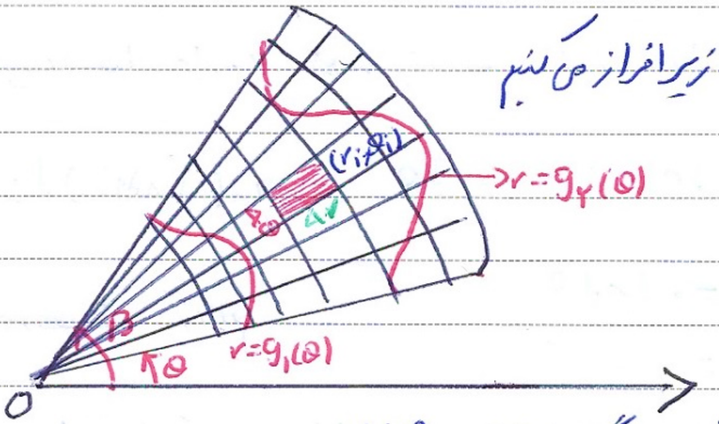
فاکتور

$$= \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\Delta\theta$$

اگر میانگین دو شعاع یعنی $\frac{1}{2}(r_2+r_1)$ را با $\bar{r}$ نمایش دهیم آنگاه

$$\Delta A = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$$

حال فرض کنیم ناحیه R در مختصات قطبی بین دو خم دار هموار $r = g_1(\theta)$ و $r = g_2(\theta)$



محدود شده باشد. این ناحیه را به صورت زیر افراز می‌کنیم

فرض کنیم که زیرناحیه‌های

$R_1, R_2, \dots, R_n$

کاملاً در درون R قرار داشته و d اندازه بزرگترین قطر R_i ها باشد.

مساحت هر R_i برابر است با $\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$ که در آن r_i میانگین شعاع‌های R_i

است. در این صورت اگر (r_i, θ_i) نقطه‌ای در R_i و f تابعی از متغیرهای قطبی r و θ باشد

آنگاه می‌توان نشان داد که

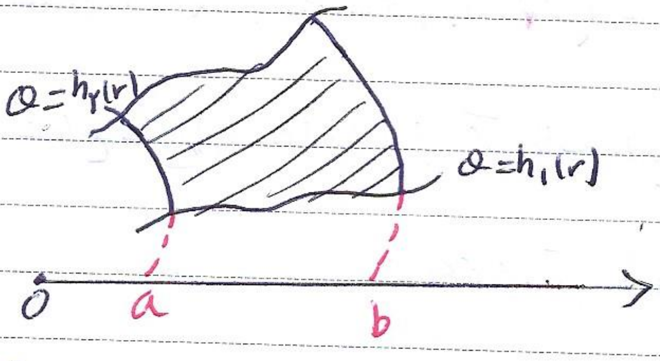
$$\iint_R f(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta r_i \Delta\theta_i f(r_i, \theta_i)$$

این انتگرال دوگانه را می‌توان توسط انتگرال مکرر زیر محاسبه کرد.

$$\int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

تذکر ①: اگر تابع $f(r,\theta)$ روی ناحیه R محدود به خم‌های $\theta=h_1$ ، $\theta=h_2(r)$ ، $r=a$ و $r=b$ پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA=\int_a^b\int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

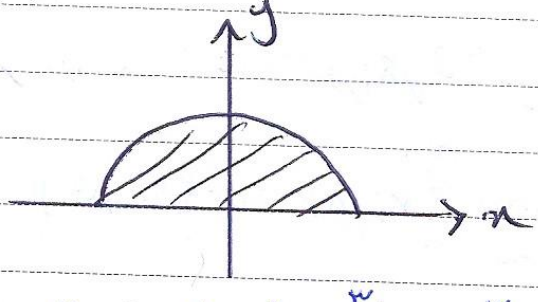


تذکر ②: برای تبدیل یک انتگرال مکرر در مختصات دکارتی به یک انتگرال مکرر در مختصات قطبی، ابتدا به جای x و y به ترتیب $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ را قرار می‌دهیم. سپس به جای $dy\,dx$ (یا $dx\,dy$) عبارت $r\,dr\,d\theta$ (یا $r\,d\theta\,dr$) را قرار می‌دهیم و حدود انتگرال را به مختصات قطبی تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} dy\,dx=r\,dr\,d\theta \\ dx\,dy=r\,d\theta\,dr \end{cases}$$

مثال: انتگرال مکرر زیر را با استفاده از مختصات قطبی محاسبه کنید.

$$\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy\,dx$$



حل: چون

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}=r^3$$

$$\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^3(r\,dr\,d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{a^2}{2} d\theta = \frac{a^2}{2}\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{2}$$

تذکر ۳: اگر $f(r,\theta)$ روی ناحیه R پیوسته و مثبت باشد، آنگاه حجم جسم محدود به نمودار f و ناحیه R برابر است با

$$V = \iint_R f(r,\theta)\, dA$$

همچنین اگر به ازای (r,θ) در R، $f(r,\theta)=1$ آنگاه مساحت ناحیه R برابر است با

$$A = \iint_R dA$$

ص۱ (فصل اول) (دکتر بهشتانی وش) (جزوه معادلات دیفرانسیل)

تعریف: معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که شامل یک یا چند مشتق یا دیفرانسیل باشد.

معادلات دیفرانسیل براساس ویژگی‌های زیر رده‌بندی می‌شوند.

الف) نوع (عادی یا جزئی) ب) مرتبه پ) درجه

تعریف: هر معادله که در ضابطه آن علاوه بر متغیر مستقل و متغیر تابعی، مشتقات مراتب مختلف متغیر تابعی نسبت به متغیر مستقل نیز حاضر باشند، معادلات دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شوند.

تعریف: بالاترین مرتبه مشتق‌گیری حاضر در ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را مرتبه آن معادله دیفرانسیل گویند.

به عنوان مثال معادله دیفرانسیل مرتبه n، با متغیر مستقل x و متغیر تابعی y دارای نمایش عمومی

$f(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$ است.

تعریف: اگر بتوان ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را نسبت به مرتبه مشتق‌گیری بصورت یک چند جمله‌ای نوشت، بزرگترین توان در جملات تعیین‌کننده مرتبه را درجه آن معادله دیفرانسیل گویند. به عنوان مثال:

- معادله دیفرانسیل $xy'+y=\sec x$ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۱، با درجه ۱ و نسبت به y برحسب x است.
- معادله دیفرانسیل $u''+u=\sec x$ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲، با درجه ۱ و نسبت به u برحسب x است.

تعریف: هر تابع که در ضابطه یک معادله دیفرانسیل مفروض صدق کند جواب آن معادله دیفرانسیل خوانده می‌شود.

لازم به ذکر است تابع جواب می‌تواند به هر سه نمایش صریح، ضمنی و پارامتری بیان گردد.

مثال: ثابت کنید تابع $y=\sin x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ است؟

$$\left(y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \Rightarrow y''=-\sin x\right) \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}$$

$$y''+y=-\sin x+\sin x=0$$

پس $y=\sin x$ در معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ صدق می‌کند.

جواب یک معادله دیفرانسیل: جواب معادله دیفرانسیل را می‌توان به یکی از صورتهای زیر محاسبه کرد

۱) جواب عمومی ۲) جواب خصوصی

۱- اگر جواب معادله دیفرانسیل توسط یک رابطه با ثابتهای دلخواه بیان گردد جواب عمومی آن معادله نامیده می‌شود. در واقع جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل بصورت یک دسته منحنی n- پارامتری با نمایش عمومی $g(x, y, c_1, \dots, c_n)=0$ ارائه می‌گردد.

② - اگر جواب معادله دیفرانسیل، فاقد هرگونه ثابت دلخواه و با اعمال شرایط اولیه بر جواب عمومی بدست آید جواب خصوصی یا به تعبیر هندسی خم انتگرال نامیده می‌شود.

- لازم به ذکر است که شرایط موجود در یک معادله دیفرانسیل، که منجر به تعیین ثابت‌های حاضر در نمایش جواب عمومی می‌گردند شرایط اولیه نامیده می‌شوند. و همچنین یک معادله دیفرانسیل همراه با شرط اولیه را مسأله با مقدار اولیه می‌نامیم.

مثال: دسته منحنی ۱-پارامتری $y=ce^{x}$، جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'-y=0$ است. جوابی از این معادله با شرط اولیه $y(0)=1$ اینگونه بدست می‌آید:

$$y=ce^{x} \xrightarrow{x=0} y(0)=ce^{0} \xrightarrow{y(0)=1} c=1$$

که در اینصورت $y=e^{x}$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'-y=0$ می‌باشد که از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد.

تعریف: اگر جواب معادله دیفرانسیل به ازای هیچ شرایط اولیه‌ای از جواب عمومی کاسبه نگردد جواب غیرعادی نامیده می‌شود.

تعریف: هر معادله دیفرانسیل با نمایش

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n نامیده می‌شود. این دسته از معادلات فقط دارای جواب عمومی بوده و جواب غیرعادی ندارند.

مثال: نشان دهید معادله دیفرانسیل $y=(x^2-1)^n$ دارای جواب $(x^2-1)y'=2nxy$ می‌باشد؟

حل) $y=(x^2-1)^n \Rightarrow y'=n(2x)(x^2-1)^{n-1} \Rightarrow y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$

$$\xrightarrow{(x^2-1)\times \text{طرفین}} (x^2-1)y'=2nx(x^2-1)^n \xrightarrow{(x^2-1)^n=y} (x^2-1)y'=2nxy$$

تعریف: اگر همه جملات معادله نسبت به تابع مجهول و مشتقات آن از درجه 1 باشند معادله را خطی گویند و در غیر این صورت غیرخطی.

مثال: خطی $y'+y=1$ ، غیرخطی $yy'+\sin y=0$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

معادله مرتبه اول را می‌توان به فرم‌های زیر نوشت.

ص ۲

$y' = f(x,y)$ یا $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$

مثال:

$\frac{dy}{dx}$ $\quad y' = \frac{x(y+1)}{(x^2+1)\,y} \Rightarrow \underbrace{(x^2+1)\,y\,dy}_{q} - \underbrace{x(y+1)\,dx}_{p} = 0$

الف) معادله دیفرانسیل $p\,dx + q\,dy = 0$ را تفکیک پذیر گویند هرگاه p تابعی فقط از x و q تابعی فقط از y باشد. مثال: (تفکیک پذیر)

$$\frac{y}{y+1}\,dy = \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\xRightarrow{\int} \int \frac{y+1-1}{y+1}\,dy + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + c$$

$$\Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + c$$

(مشتق مخرج درصورت باشد یعنی ln داریم)

$$y - \ln(y+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

جواب عمومی معادله

مثال:

$$x^2 y y' - e^y = 0$$

حل: $x^2 y \frac{dy}{dx} = e^y \rightarrow x^2 y\,dy = e^y\,dx \qquad y e^{-y}\,dy = \frac{dx}{x^2}$ تفکیک پذیر

$$\xRightarrow{\int} \int y e^{-y}\,dy = \int \frac{dx}{x^2} + c$$

	مشتق D	انتگرال $\int$
$\pm$	y	e^{-y}
	1	$-e^{-y}$
	0	e^{-y}

$$-y e^{-y} - e^{-y} = -\frac{1}{x} + c$$

جواب عمومی معادله

حالت خاص: معادلاتی به فرم $y' = f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $t = ax+by+c$ تفکیک پذیر می‌شود.

1) $y' = 2x + y$ $\qquad$ 2) $y' = \cos(x-y)$ $\qquad$ 3) $y' = -2(2x+3y)^2$

تعریف همگن: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گویند هرگاه

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

مثال: همگن از درجه دوم

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$$

$$(tx)^2 - 3tx\,ty + 2(ty)^2 = t^2 \overbrace{(x^2 - 3xy + 2y^2)}^{f(x,y)}$$

(به عبارت دیگر f همگن است اگر درجه همه جملات آن برابر باشند)

معادله ی $p\,dx + q\,dy = 0$ را همگن گویند اگر p و q توابعی همگن از درجه یکسان باشند.

ص ۴

مثال:

① $xy' = (1-x^2)\cot y$

حل) $x\dfrac{dy}{dx} = (1-x^2)\cot y$

$$\frac{dy}{\cot y} = \frac{(1-x^2)}{x}dx \qquad \text{تفکیک پذیر}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin y}{\cos y}dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)dx \Rightarrow -\ln\cos y = \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

نکته: تغییر متغیر $dy = x\,dz + z\,dx$ و $y = xz$ معادلهٔ همگن را تفکیک پذیر می‌کند.

② $(xe^{\frac{y}{x}} + y)dx - x\,dy = 0$

حل) $y = xz \qquad dy = x\,dz + z\,dx$

$$(xe^{z} + xz)dx = x(x\,dz + z\,dx)$$

$$\xrightarrow{\div x} e^{z}dx + \cancel{z\,dx} = x\,dz + \cancel{z\,dx} \Rightarrow \frac{dz}{e^{z}} = \frac{dx}{x} \qquad \text{تفکیک پذیر}$$

$$\xRightarrow{\int} -e^{-z} = \ln x + c \Rightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln x + c$$

حالت های خاص همگن:

اگر $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c}\right)$

الف) اگر $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ (دو خط موازی باشند) تغییر متغیر $t = ax+by$ معادلهٔ فوق را تفکیک پذیر می‌کند.

ب) اگر $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ (دو خط غیر موازی هستند) اگر (x_0, y_0) مختصات محل برخورد دو خط باشند تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

معادله را همگن می‌کند.

مثال:

$$y' = \frac{x-3y+3}{2x-4y+1}$$

حل) $y' = \dfrac{x-3y+3}{2x-4y+1}$ $\qquad \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{-4}$ دو خط موازی

$$t = x - 3y \quad , \quad t' = 1 - 3y' \Rightarrow y' = \frac{1 - t'}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{1-t'}{3} = \frac{t+3}{2t+1} \Rightarrow 1 - t' = \frac{3t+9}{2t+1} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{3t+9}{2t+1} = \frac{-t-8}{2t+1} \xRightarrow{\times dx} \frac{2t+1}{t+8}\, dt = -dx$$ تفکیک پذیر

$$\Rightarrow \int \frac{2t + \overset{16-15}{1}}{t+8}\, dt = -\int dx + c$$

$$\Rightarrow \int \left(2t - \frac{15}{t+8}\right) dt = -\int dx + c$$

$$\Rightarrow t^2 - 15 \ln(t+8) = -x + c \Rightarrow$$ جایگذاری $t = x - 3y$

حالت خاص همگن:

بعضی از معادلات را با تغییر متغیر $y = t^\alpha$ و انتخاب مناسب α به معادله‌ی همگن تبدیل کرد.

معادلات دیفرانسیل کامل:

$$f(x,y) = 0$$

$$\underbrace{df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0}_{\text{دیفرانسیل کامل}}$$

معادله $p\,dx + q\,dy = 0$ دیفرانسیل کامل است اگر تابع $f(x,y) = 0$ چنان موجود باشد که

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = p \\ \frac{\partial f}{\partial y} = q \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}}$$ شرط کامل بودن

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 \underset{\text{کامل}}{=} \frac{\partial q}{\partial x} = 1$$

به عبارت دیگر به طور خلاصه دیفرانسیل کامل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

مثال:

$$(\underbrace{y^2 e^{xy^2} + 4x^3}_{p})\,dx + (\underbrace{2xy\, e^{xy^2} - 3y^2}_{q})\,dy = 0$$