

رفع ابعاء: اول رفع ابعاء از $\frac{0}{0}$ به نام خنجر ۱

چون حال رفع ابعاء

مثال: حد توابع زیر را بیابید

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 4}{\sqrt{n+2} - 2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(n+2)(\sqrt{n+2} + 2)}{(\sqrt{n+2} - 2)(\sqrt{n+2} + 2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(n+2)(\sqrt{n+2} + 2)}{(n+2-4)} = \frac{(n-2)(n+2)(\sqrt{n+2} + 2)}{(n-2)}$$

از ۱-۱ خنجر ۱ (خنجر دوم) خنجر ۲ (خنجر سوم) خنجر ۳ (خنجر چهارم) خنجر ۴ (خنجر پنجم) خنجر ۵ (خنجر ششم) خنجر ۶ (خنجر هفتم) خنجر ۷ (خنجر هشتم) خنجر ۸ (خنجر نهم) خنجر ۹ (خنجر دهم) خنجر ۱۰ (خنجر یازدهم) خنجر ۱۱ (خنجر دوازدهم) خنجر ۱۲ (خنجر سیزدهم) خنجر ۱۳ (خنجر چهاردهم) خنجر ۱۴ (خنجر پانزدهم) خنجر ۱۵ (خنجر شانزدهم) خنجر ۱۶ (خنجر هجدهم) خنجر ۱۷ (خنجر نوزدهم) خنجر ۱۸ (خنجر بیستم) خنجر ۱۹ (خنجر بیست و یکم) خنجر ۲۰ (خنجر بیست و دوم) خنجر ۲۱ (خنجر بیست و سوم) خنجر ۲۲ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۲۳ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۲۴ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۲۵ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۲۶ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۲۷ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۲۸ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۲۹ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۳۰ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۳۱ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۳۲ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۳۳ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۳۴ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۳۵ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۳۶ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۳۷ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۳۸ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۳۹ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۴۰ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۴۱ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۴۲ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۴۳ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۴۴ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۴۵ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۴۶ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۴۷ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۴۸ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۴۹ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۵۰ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۵۱ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۵۲ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۵۳ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۵۴ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۵۵ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۵۶ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۵۷ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۵۸ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۵۹ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۶۰ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۶۱ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۶۲ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۶۳ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۶۴ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۶۵ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۶۶ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۶۷ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۶۸ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۶۹ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۷۰ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۷۱ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۷۲ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۷۳ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۷۴ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۷۵ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۷۶ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۷۷ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۷۸ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۷۹ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۸۰ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۸۱ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۸۲ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۸۳ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۸۴ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۸۵ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۸۶ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۸۷ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۸۸ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۸۹ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۹۰ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۹۱ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۹۲ (خنجر بیست و دهم) خنجر ۹۳ (خنجر بیست و یازدهم) خنجر ۹۴ (خنجر بیست و چهارم) خنجر ۹۵ (خنجر بیست و پنجم) خنجر ۹۶ (خنجر بیست و ششم) خنجر ۹۷ (خنجر بیست و هفتم) خنجر ۹۸ (خنجر بیست و هشتم) خنجر ۹۹ (خنجر بیست و نهم) خنجر ۱۰۰ (خنجر بیست و دهم)

$$(n+2)(\sqrt{n+2} + 2) = 4(\sqrt{4} + 2) = 16$$

رفع ابعاء: $\frac{0}{0}$ اگر $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = 0$ و $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = 0$ که آنرا حالت مبهم می‌گویند

می‌توانیم حالت برای رفع ابعاء و پیدا کردن حد تابع باید صورت و مخرج را به $n-a$ تقسیم کنیم و عامل مشترک را از صورت و مخرج حذف کنیم حال مثال

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{حال رفع ابعاء}} \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n-1}{(n-1)(n^2+n+1)} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n^2+n+1}$$

$$n^2 - 1 = (n-1)(n^2+n+1) \Rightarrow n^2 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$$

$$= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

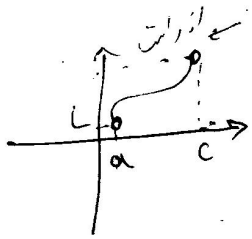
$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow 4} \frac{n^2 - 14}{\sqrt{n} - 2} = \frac{16-14}{\sqrt{4}-2} = \frac{2}{2-2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابعاء}}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow 4} \frac{(n-4)(n+4)}{\sqrt{n}-2} = \lim_{n \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{n}-2)(\sqrt{n}+2)(n+4)}{\sqrt{n}-2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 4} (\sqrt{n}+2)(n+4) = (\sqrt{4}+2)(4+4) = (2+2)(8) = 32$$

تعریف حد راست: فرض کنید تابع f روی D_f تعریف شده باشد و $a < c$ و $(a, c) \subseteq D_f$ اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند δ موجود باشد که

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$



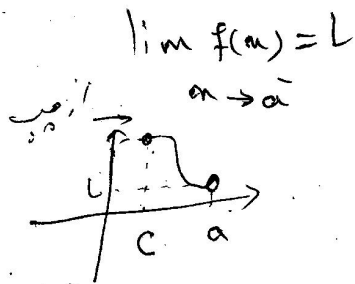
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

آنگاه L را حد راست f در نقطه a می نامیم و می نویسیم

علاقت $x \rightarrow a^+$ به معنی $x > a$ و $x \rightarrow a$ است

تعریف حد چپ: فرض کنید تابع f روی D_f تعریف شده باشد و $c < a$ و $(c, a) \subseteq D_f$ اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند δ موجود باشد که

$$- \delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

آنگاه L را حد چپ f در نقطه a می نامیم و می نویسیم

علاقت $x \rightarrow a^-$ به معنی $x < a$ و $x \rightarrow a$ است

حال می بینیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ زمانی موجود است اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ وجود داشته باشند و با هم مساوی باشند پس می نویسیم اگر حد چپ و حد راست وجود داشته باشند و برابر باشند و با هم برابر باشند تابع در آن نقطه حد دارد.

مثال: $f(x) = \frac{x + |x|}{|x|}$ که در آن $(x \neq 0)$ در نقطه $x = 0$ حد دارد یا نه؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + |x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+1) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + |x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1-1)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1-1) = -1-1 = -2$$

پس حد راست و چپ وجود دارند ولی چون با هم برابر نیستند پس تابع در نقطه صفر حد ندارد.

مثال ۱۰: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x^2 + 5 & x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 5) = 2^2 + 5 = 9$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، پس حد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & x \leq -2 \\ x^2 + a & x > -2 \end{cases}$$

برای اینکه حد $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وجود داشته باشد، باید $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (ax^2 - 2) = a(-2)^2 - 2 = 4a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + a) = (-2)^2 + a = 4 + a$$

$$4a - 2 = 4 + a \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

چند نکته:

حدهای بی‌نهایت:

① $-\infty - \infty = -\infty$

② $a + \infty = +\infty$

③ $a - \infty = -\infty$

④ $a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$

⑤ $a(-\infty) = \begin{cases} -\infty & a > 0 \\ +\infty & a < 0 \end{cases}$

⑥ $\frac{a}{+\infty} = 0$

⑦ $\frac{a}{0^+} = +\infty$

⑧ $\frac{a}{0^+} = -\infty$ $a < 0$

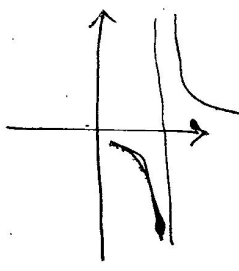
⑨ $\frac{a}{0^-} = -\infty$ $a > 0$

⑩ $\frac{a}{0^-} = +\infty$ $a < 0$

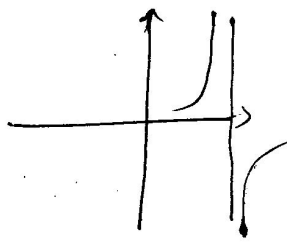
ع

مثال:

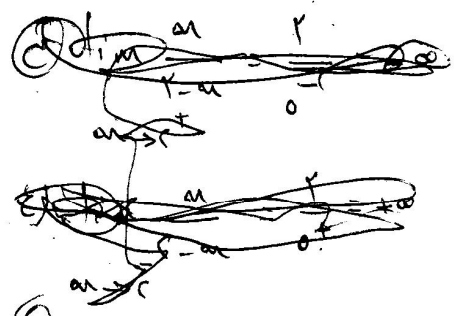
① $\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{2n+1}{n-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$



② $\lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{2n+1}{n-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$



خانم همتی گرامش معاری
تراب تجلی حیدری
خانم امیری گرامش معاری
آقای قاریان رفیق
به وطنه تقدیر
خانم ابرین حیدری
آقای فاضل تربیت
به رشتی حیدری
بی مهر گرامش جوی



③ $\lim_{n \rightarrow 2^+} \frac{3n}{(n-2)^2} = \frac{6}{0^+} = +\infty$

پیوستی

تابع f را در نقطه a پیوسته می نامیم هرگاه دارای سه شرط زیر باشد

(۱) $f(a)$ وجود داشته باشد یعنی a متعلق به D_f باشد

(۲) $\lim_{n \rightarrow a} f(n)$ وجود داشته باشد
(۳) $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = f(a)$

اگر هر یک از سه شرط بالا در $a = a_0$ برقرار نباشد، f را در a_0 ناپیوسته می نامیم. در این صورت a_0 را به نقطه ناپیوستگی f می نامیم. ~~اینجا~~ اگر نمودار تابع در هیچ نقطه ای از دامنه آن در a_0 وجود نداشته باشد، f را در a_0 ناپیوسته می نامیم. تابع f را در a_0 پیوسته می نامیم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند δ موجود باشد به طوری که

$$|n - a| < \delta \Rightarrow |f(n) - f(a)| < \epsilon$$

باشد بطوریکه

حال اگر

(الف) $f(a_0)$ وجود نداشته باشد یا $a_0 \notin D_f$ یا تابع در a_0 ناپیوسته است

(ب) $\lim_{n \rightarrow a_0^-} f(n) \neq \lim_{n \rightarrow a_0^+} f(n) = f(a_0)$ یا a_0 ناپیوسته است پس در a_0 پیوستی
راست دارد



(ج) تابع در x_0 ناپیوسته است ولی در x_0 پیوستگی میباید داشت

(د) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ تابع در x_0 ناپیوسته است ولی این ناپیوستگی رفع شدنی است

(ه) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ تابع در x_0 ناپیوسته است و این ناپیوستگی اساسی است

مثال

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 1 \\ c & x = 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = c \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = c$$

نیم تابع در نقطه $x=1$ پیوسته نیست چون با مقدار تابع از طرف راست

برابر نیست ولی چون مقدار از چپ برابر است پس در این نقطه پیوستگی میباید داشت

$$f(x) = \begin{cases} c x + 1 & x > 1 \\ c & x = 1 \\ \sqrt{c - x} & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = c \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (c x + 1) = c$$

۱ باقی است

مقدار از چپ برابر نیست از ناپیوستگی

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{c - x} = c$$

ناپیوستگی اساسی است چون در ندارد چون حد چپ و راست با هم برابر نیست و پیوستگی میباید داشت ندارد چون با

مثال ۴) $f(x) = \begin{cases} c x^c - 1 & x < 2 \\ c & x = 2 \\ a x^c - c & x > 2 \end{cases}$

۴

$\Rightarrow f(2) = c$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} c x^c - 1 = c(2)^c - 1$

$= c$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} a x^c - c = a - c = c$

در این تابع حد راست، حد چپ و مقدار تابع با هم برابر است پس این تابع نقطه پیوسته است

مثال ۵) به ازای چه مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} a \sin x + \sqrt{c} \cos x & x \geq \frac{\pi}{4} \\ 2a + 1 & x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} (a \sin x + \sqrt{c} \cos x) = a \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{c} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{c} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}}$

حال $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (2a + 1) = 2a + 1 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} = 2a + 1$

$\Rightarrow \frac{c}{\sqrt{2}} - 1 = 2a - \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} a \Rightarrow 1 = c a \Rightarrow a = \frac{1}{c}$

پس اگر $a = \frac{1}{c}$ به این تابع همواره پیوسته است
 ۵) اعداد a و b را طوری بیابید که تابع زیر در همه جا پیوسته باشد

$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & x \leq -\frac{\pi}{6} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \\ c \cos x & x \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}^-} (-2 \sin x) = -2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -2(-\frac{1}{2}) = 1$

$\Rightarrow -a + b = 1$

و $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}^+} (a \sin x + b) = a \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b = a(-\frac{1}{2}) + b = -a + b$

و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} (a \sin x + b) = a \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + b = a(\frac{1}{2}) + b = a + b$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} c \cos x = c \cos \frac{\pi}{6} = 0$

$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(-b) + b = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

مجموعه‌های عمومی - مجموعه‌های عمومی - مجموعه‌های عمومی

مجموعه‌های عمومی - مجموعه‌های عمومی - مجموعه‌های عمومی

مجموعه‌های عمومی - مجموعه‌های عمومی - مجموعه‌های عمومی

جبر تراجیح: فرض کنیم f و g دو تابع داده‌های D_f و D_g باشند. برای هر $u \in D_f \cap D_g$ توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f \cdot g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$1) (f+g)(u) = f(u) + g(u) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$2) (f-g)(u) = f(u) - g(u) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$3) (fg)(u) = f(u)g(u) \quad D_{fg} = D_f \cap D_g$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)(u) = \frac{f(u)}{g(u)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{u \in D_g : g(u) = 0\}$$

اعمال جبری دیگر بر f نیز به همین ترتیب تعریف می‌شوند.

$$5) (cf)(u) = c f(u) \quad f^{(n)}(u) = \underbrace{f(u) f(u) \dots f(u)}_{n \text{ عامل}}$$

مثال: فرض کنید $f(u) = \sqrt{u+1}$ و $g(u) = \frac{1}{u}$ مقادیر زیر را حساب کنید.

$$1) (f-g)(1) = ? \Rightarrow f(1) - g(1) = \sqrt{1+1} - \frac{1}{1} = \sqrt{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}$$

$$2) f'(2) = f(2) f(2) = (\sqrt{2+1})(\sqrt{2+1}) = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 2(3) = 6$$

مثال: اگر $f(u) = \frac{1}{u-2}$ و $g(u) = \frac{1}{\sqrt{u-1}}$ داده‌های f و g و دامنه مشترک f و g را بیابید.

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\Rightarrow D_f \cap D_g = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$D_g = \{u : u \in \mathbb{R}, u-1 > 0\} = (1, +\infty)$$

مشتق: مفهومی مشتق یکی از مهمترین مفاهیم حساب دفرانسیس و انتگرال است که در زمینه‌های گوناگون اعم از علوم کامپیوتر، فیزیکی و حتی انسانی کاربرد دارد. اول این مطلب از این مساله ساده هندسی ناشی می‌شود این مساله پیدا کردن خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه بود. از مشتق در تعین صعودی و نزولی بودن توابع Min و Max و دفرانسیس و استفاده می‌شود به طور کلی می‌توان گفت که مشتق برای تعین آهنگ تغییرات پدیده‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. شب خط مماس است از ناوانت زاویه ای است که خط مماس محور x ها می‌سازد و به خط مماس می‌گویند. $m = \frac{dy}{dx}$ عدد در $m = 1$ $m = -1$ $m = 0$

مشتق تابع $y = f(x)$ را با علامت $\frac{dy}{dx}$ یا $f'(x)$ یا f'_x نشان می‌دهند. در مواردی که مشتق تابع در یک نقطه برابر با 0 است با شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه 0 و یا شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه برابر با 0 است با شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه 0. می‌دانیم شیب خط همواره ثابت است ولی شیب منحنی در هر نقطه آن متفاوت است. شیب منحنی در هر نقطه را شیب مماس بر آن تابع در نقطه مذکور می‌نامند. برای فرمول مشتق داریم:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

این سه فرمول یکی با هم می‌هند

مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ را در نقطه 2 بدست آورید.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 1 - 9}{x - 2}$$

$$f'(2) = ? \quad f(2) = 9$$

$$= \lim_{n \rightarrow 2} \frac{5n^2 + 2n - 24}{n - 2} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(5n+12)}{n-2} = \lim_{n \rightarrow 2} (5n+12) = 22$$

تذکره: تابع $y = f(x)$ را در نقطه a داریم هرگاه تابع $f(x)$ در نقطه a دارای مشتق باشد در این نقطه پیوسته است و لیکن عکس قضیه فوق صحیح نیست یعنی ممکن است تابعی در یک نقطه پیوسته باشد و در آنجا مشتق نداشته باشد.

مثال: تابع $f(x) = |x|$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست زیرا:

شرط پیوستگی
 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} |x| = f(0) = 0$
 (از طرف راست)

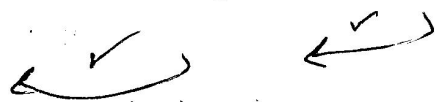
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

از طرف چپ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون در چپ و راست نقطه $x = 0$ برابر نیست پس تابع فوق در این نقطه پیوسته نیست و در نتیجه مشتق ندارد در این نقطه.

مشتق $\rightarrow$ پیوسته $\rightarrow$ حد



تعریف شیب (ضریب زاویه): شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $(a, f(a))$ که آن را به عبار $M(a)$ نشان می دهیم عبارت است از:

$$M(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۱۰

$$1 + 2a$$

$$2(1 + a)$$

مثال: شیب مماس بر منحنی زیر را در نقطه داده شده بیابید و بنویسید.

الف) $y = a^2 + 2$ $a = 2$

$$a^2 - a^2 = (a - a)(a^2 + a + a^2)$$

همین کار را در این مثال

$$m(2) = \lim_{a \rightarrow 2} \frac{f(a) - f(2)}{a - 2} = \lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2 + 2 - 10}{a - 2} = \lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2 - 8}{a - 2} = \lim_{a \rightarrow 2} \frac{(a - 2)(a + 4)}{a - 2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2} (a + 4) = 2 + 4 = 6$$

ب) $y = \sqrt{a}$ $a = 4$

$$m(4) = \lim_{a \rightarrow 4} \frac{f(a) - f(4)}{a - 4} = \lim_{a \rightarrow 4} \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 4} = \lim_{a \rightarrow 4} \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)}$$

(کارندرج)

$$= \lim_{a \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{a} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

خط مماس و خط قائم به تابع f به معادله $y = f(a)$ معروف است. می خواهیم معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $a = a$ بیابیم. گوییم برای تقسیم معادله خط، معادلات $y = f(a)$ و $y = f(a) + f'(a)(a - a)$ را داریم. لازم است پس در حالت کلی معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $M(a, f(a))$ بصورت زیر بنویسیم:

$$y - f(a) = f'(a)(a - a) \rightarrow \text{معادله خط مماس}$$

تذکره: خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $M(a, f(a))$ عبارت است از:

(۱) خط گذرنده از M با شیب $f'(a)$ در صورتیکه $f'(a)$ وجود داشته باشد یعنی $y - f(a) = f'(a)(a - a)$

(۲) خط $a = a$ اگر $f'(a) = \infty$ باشد

اگر وضعیت فوق برقرار نباشد تابع در نقطه M خط مماس ندارد.

۱۱

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2$ را در نقطه $a = 0$ را بدست آورید.

~~خط مماس~~

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\Rightarrow y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

خط قائم: می دانیم اگر دو خط بر هم عمود باشند $m m' = -1$ است اما اگر $m = f'(a)$ باشد $m' = -\frac{1}{f'(a)}$

شیب خط قائم خواهد بود پس معادله خط قائم یا نرمال بر منحنی در نقطه M بصورت

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \rightarrow \text{معادله خط قائم}$$

مثال: معادله خط قائم بر منحنی تابع $y = x^3$ را در نقطه $a = 0$ را بدست آورید.

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{3}x + 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x$$

مشتقهای بطرفه

تعریف: تابع $y = f(x)$ را در نقطه $x = a$ مشتقهای راست و چپ f در a را بدست آوریم $(a \in D_f)$ را به ترتیب

با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نشان داده می شوند با روابط زیر تعریف می کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شروط برای اینکه این دو حد وجود داشته باشند: مشتقهای راست و چپ f در نقطه a را به ترتیب $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ می نامیم در صورتی که در دو شرط زیر برقرار باشد

تعریف: تابع f را روی بازه بسته $[a, b]$ مشتق پذیر نامیم در صورتی که در دو شرط زیر برقرار باشد

(۱) f روی بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد

(۲) مشتقهای بطرفه $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ وجود داشته باشند

در این بخش می‌خواهیم یاد بگیریم

۱۲

۱) $y = f(u) = \alpha \rightarrow f'(u) = 0$

۲) $f(u) = \alpha u \rightarrow f'(u) = \alpha$

۳) $(f \pm g)(u) = f'(u) \pm g'(u)$

مثال $f(u) = 3u^2 + 2u \rightarrow f'(u) = (6u)' + (2)' = 6u + 2$

۴) $(f \times g)'(u) = f'(u)g(u) + g'(u)f(u)$

مثال $y = (u^2 + 1)(u^3 + 2u) \Rightarrow y' = (2u)(u^3 + 2u) + (3u^2 + 2)(u^2 + 1) = 2u^4 + 4u^2 + 3u^4 + 3u^2 + 2u^2 + 2 = 5u^4 + 9u^2 + 2$

$y = (u^2 + 1)(u^3 + 2u) \Rightarrow y' = (2u)(u^3 + 2u) + (3u^2 + 2)(u^2 + 1) = 2u^4 + 4u^2 + 3u^4 + 3u^2 + 2u^2 + 2 = 5u^4 + 9u^2 + 2$

$|u| = \sqrt{u^2}$

$y' = n f'(u) f^{n-1}(u)$

مثال $y = (u^2 - 2u + 1)^2 \Rightarrow y' = 2(u^2 - 2u + 1)(2u - 2) = 4u(u - 1)(u^2 - 2u + 1)$

مثال $y = (u^2 + 2u + 1)^3 \Rightarrow y' = 3(u^2 + 2u + 1)^2(2u + 2) = 6(u + 1)^3(u^2 + 2u + 1)^2$

۵) $h(u) = \frac{f(u)}{g(u)} \Rightarrow h'(u) = \frac{f'(u)g(u) - g'(u)f(u)}{[g(u)]^2}$

مثال $f(u) = \frac{u^2 + 1}{u^2} \Rightarrow f'(u) = \frac{(2u)(u^2) - (u^2 + 1)(2u)}{(u^2)^2} = \frac{2u^3 - 2u^3 - 2u}{u^4} = -\frac{2}{u^3}$

مثال $y = \frac{u^2 + 2u}{u^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{(2u + 2)(u^2 + 1) - (u^2 + 2u)(2u)}{(u^2 + 1)^2} = \frac{2u^2 + 2u^2 + 2 + 2u - 2u^3 - 4u^2}{(u^2 + 1)^2} = \frac{-2u^3 - 2u^2 + 2u + 2}{(u^2 + 1)^2}$

مشتق توابع مرکب (تابعی از تابع): اگر تابع $u = g(x)$ در نقطه u_0 و تابع $y = f(u)$ در نقطه u_0 مشتق داشته باشند، آنگاه مشتق تابع مرکب $y = f(g(x))$ در نقطه x_0 برابر است با $y'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0)$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

مثال $y = f(u^2 - 2u + 1) \Rightarrow y' = f'(u^2 - 2u + 1)(2u - 2) = 2(u - 1)f'(u^2 - 2u + 1)$

① $y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{m u'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

مثال $y = \sqrt[3]{(u^2 - 2u + 1)^2} \rightarrow y' = \frac{2(2u - 2)}{3 \sqrt[3]{(u^2 - 2u + 1)^2}}$

٢) $y = |u| \Rightarrow y' = \frac{u u'}{|u|}$

مثال $y = |u^2 - 2u + 1| \rightarrow y' = \frac{(2u - 2)(2u - 2)}{|u^2 - 2u + 1|}$

جوابات متفاوتة من

$y = \frac{u^2 - 2}{u^2 + 1}$
 $\Rightarrow y' = \frac{2u(u^2 + 1) - (u^2 - 2)(2u)}{(u^2 + 1)^2}$
 $= \frac{2u^3 + 2u - 2u^3 + 4u}{(u^2 + 1)^2}$
 $= \frac{6u}{(u^2 + 1)^2}$

 $y = \frac{\sqrt{2u}}{u^2 + 1}$
 $y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2u}} (u^2 + 1) - \sqrt{2u} (2u)}{(u^2 + 1)^2}$

الف) $y = u^2 + 2u - 1 \rightarrow y' = 2u + 2$

ب) $y = u(u+1)^2(2u+5) \rightarrow y' =$ غير

ج) $y = \frac{2u - 2}{\sqrt{u}} \rightarrow y' = \frac{2\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}(2u - 2)}{u} = \frac{2u - 2u + 2}{2u\sqrt{u}} = \frac{2}{2u\sqrt{u}}$

١) $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$

مثال

مثال $y = \sin(u^2 - 2u + 7u - 2) \rightarrow y' = (2u - 2 + 7) \cos(u^2 - 2u + 7u - 2)$

٢) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$

مثال $y = \cos(\sin u) \Rightarrow y' = -\cos u \sin(\sin u)$

مثال $y = \cos(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$ ١٤

3) $y = \tanh u \Rightarrow y' = u'(1 + \tanh^2 u)$

مثال $y = \tanh(\sin \sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} (1 + \tanh^2(\sin \sqrt{x}))$ دائري

4) $y = \coth u \Rightarrow y' = -u'(1 + \coth^2 u)$ عكسي

مثال $y = \coth \sqrt{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \coth^2 \sqrt{x})$

الآن نرى

$y = \sin^n u \Rightarrow y' = n u' \cos u \sin^{n-1} u$

$y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n u' \sin u \cos^{n-1} u$

$y = \tanh^n u \Rightarrow y' = n u' (1 + \tanh^2 u) \tanh^{n-1} u$

$y = \coth^n u \Rightarrow y' = -n u' (1 + \coth^2 u) \coth^{n-1} u$

مثال 1) $y = \sin^3 (x^2 - 1)^4 \Rightarrow y' = 2x \times 4x^3 \cos (x^2 - 1)^4 \times \sin^2 (x^2 - 1)^4$

2) $y = \cos \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \times \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} \sin \sqrt{x^2 - 2x + 4} \cos \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

$$y = t_y^r(\sqrt{\sin u}) \Rightarrow y' = r \times \frac{\cos u}{r\sqrt{\sin u}} (1 + t_y^r \sqrt{\sin u}) t_y^c(\sqrt{\sin u})$$

$$4) y = \cot_y^r(\sin u) \Rightarrow y' = -r \cos u (1 + \cot_y^r \sin u) \cot_y^c(\sin u)$$

$$y = \sin^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, |u| < 1$$

مشتق تابع معکوس سینوس

$$مثال 1) y = \sin^{-1}(\sqrt{cu+r}) \Rightarrow y' = \frac{\frac{c}{2\sqrt{cu+r}}}{\sqrt{1-cu-r}} = \frac{c}{2\sqrt{cu+r} \times \sqrt{-cu-1}}$$

$$y = \cos^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}, |u| < 1$$

$$y = t_y^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$مثال 2) y = \arctan(u^r + r) \Rightarrow y' = t_y^{-1}(u^r + r) + u \frac{ru}{1+(u^r+r)^2}$$

$$y = \cot_y^{-1} u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$مثال 3) y = \sec^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$$

$$مثال 4) y = \arcsin(u^r + d) \Rightarrow y' = ru \sec^{-1}(u^r + d) + u^r \frac{cu^r + d}{|u^r + d| \sqrt{(u^r + d)^2 - 1}}$$

$$y = csc^{-1} u \Rightarrow y' = - \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} \quad |u| > 1$$

مشتق تابع عکوس: اگر تابع f در همسایگی نقطه a یک به یک و پیوسته بوده و $f(a)$ موجود (و غیر صفر) باشد
 آنگاه تابع f^{-1} در نقطه $b = f(a)$ مشتق پذیر است و $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ که در آن
 $a = f^{-1}(b)$

مثال: تابع $f(x) = x^2 + x$ روی R یک به یک و پیوسته است می توان نشان داد که
 مشتق f غیر صفر است همچنین داریم $f(2) = 10$ می خواهیم بدون یافتن f^{-1} مقدار
 $(f^{-1})'(10)$ را بدست آوریم.

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}$$

با ترجمه به قضیه بالا

مشتق توابع منفی:

بسیار توانی که تا بحال بررسی کردیم معادلاتی داشته که y (مقدار تابع) را به صورت صریح بر حسب x
 بیان می کردند، اما بعضی اوقات به معادلاتی نظیر $x + y^2 = 1$ یا $x^2 + y^2 = 1$ یا $x^2 + y^2 = 1$ می
 که y را به صورت صریح بر حسب x بدست نمی دهند. در این قبیل معادلات به ازای یک x
 از دانه یک یا چند مقدار برای y بدست می آید. پس اگر بخواهیم $F(x, y)$ ، y را به عنوان
 تابعی مشتق پذیر از x معرفی کنیم و رابطه مشتق گیری مستقیم از فرمول $F(x, y) = 0$ بدست
 آوریم یا از رابطه

$$y'(x) = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = - \frac{\text{مشتق } F \text{ نسبت به } x \text{ با فرض ثابت بودن } y}{\text{مشتق } F \text{ نسبت به } y \text{ با فرض ثابت بودن } x}$$

استفاده کنیم

مثال متقارن

$$1) u^2 - u^2 y + y^2 + \sin(2uy) + \cos(u^2 - y^2) = 0$$

$$\Rightarrow y'_{(u)} = \frac{2u^2 - 2uy + 2y \cos(2uy) - 2u \sin(u^2 - y^2)}{-u^2 + y^2 + 2u \cos(2uy) + 2y \sin(u^2 - y^2)}$$

مثال ۲) $u y^2 \sin(u+y) - u^2 y \cos(uy) - V = 0$

شیب ضلع‌های مثلثی به معادله
 $u^2 + y^2 + \sqrt{u^2 + y^2} = 0$
 در نقطه (۱، ۱) کدام است
 کسری

$$\Rightarrow y'_{(u)} = \frac{y^2 \sin(u+y) + u y^2 \cos(u+y) - 2u y \cos(uy) + u^2 y^2 \sin(uy)}{2u y \sin(u+y) + u y^2 \cos(u+y) - u^2 \cos(uy) + u^2 y \sin(uy)}$$

۵-۱۸ و ۵-۱۹

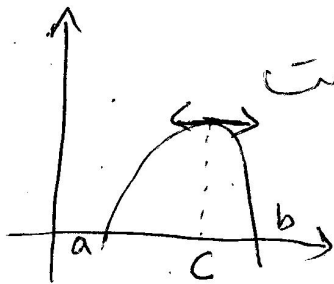
قضیه رول: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و بر بازه باز (a, b) یعنی در هر نقطه

درونی بازه، مشتق پذیر باشد. حال اگر $F(a) = F(b) = 0$ باشد آن گاه حداقل یک نقطه C

در بازه (a, b) هست به طوری که $F'(C) = 0$ به عبارت دیگر از قضیه رول نتیجه می شود که بین

تعداد و ریشه تابع مشتق پذیر f ، مشتق f' حداقل یک ریشه دارد.

تعدد ریشه‌های مشتق رول: قضیه رول بیان می‌دارد است که بین هر دو نقطه ای که منحنی همواری



خوردن هار قطع می کند حداقل در یک جا، مماس بر منحنی افقی است

مثلاً روی نمودار

مثال: فرض کنید $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ همه C هایی در بازه $(-2, 2)$ را بیابید که $f'(C) = 0$

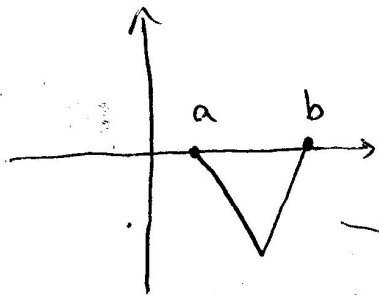
حل: چون $f(-2) = f(2) = 0$ و f در این بازه مشتق پذیر است پس بنابر قضیه رول، حداقل

یک C در بازه $(-2, 2)$ هست که $f'(C) = 0$ برای بدست آوردن C های مورد نظر، معادله

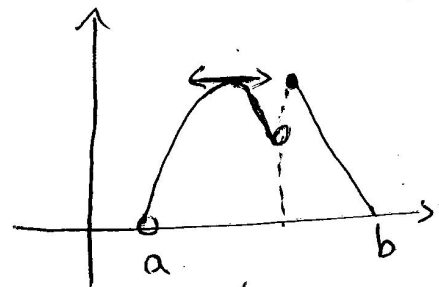
$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x = 1 \text{ و } x = -1$$

دو تبصره: ۱- در مثال قبل ما توانستیم C های مورد نظر را بیابیم زیرا معادله $f(x)=0$ به سادگی حل شده اما در بسیاری از موارد معادله داده شده $f(x)=0$ را نمی توانیم به طور دقیق حل کنیم و این قضیه رول هم در واقع یک قضیه وجودی است و راهی برای یافتن C های که $f(C)=0$ را ارائه می دهد

۲- اگر شرایط قضیه رول برای تابع f برقرار نباشد قضیه وجودی و روش مبتنی بر تابع f جایی منفرد در شکل های زیر، شرایط قضیه رول برقرار نیست در حالی که $f(x)=0$ جواب دارد ولی درگیری انبساطی است



معادله $f(x)=0$ جواب ندارد



معادله $f(x)=0$ جواب دارد

مثال ۲) از قضیه رول: صحت قضیه رول را برای تابع $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ بررسی کنید. عبارت دیگر نشان دهید که f در نقطه ای از بازه $(1,2)$ و در نقطه ای از بازه $(2,3)$ مساوی صفر است.

حل:

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4x + 3 + x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(3)(11)}}{2(3)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{2(6 \pm \sqrt{3})}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} \begin{cases} \frac{6 + \sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2.57 \\ \frac{6 - \sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1.43 \end{cases}$$

یکی از مهم‌ترین نتایج قضیه رول، قضیه مقدار میانگین است.
 قضیه مقدار میانگین: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، آنگاه حداقل

یک c در (a, b) هست به طوری که

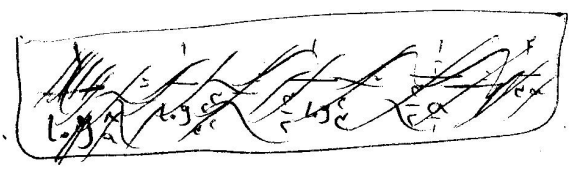
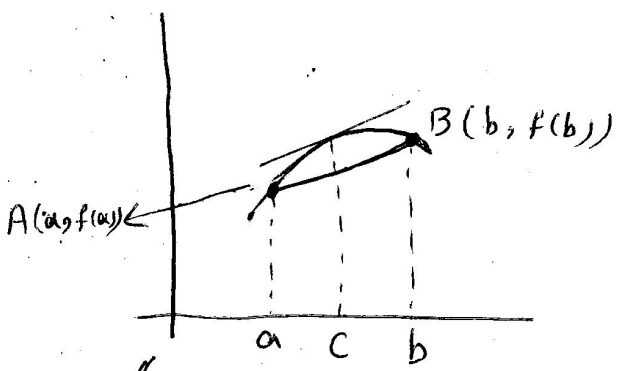
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین:

قضیه فوق می‌گوید که اگر دو نقطه A و B به طولهای a و b روی یک منحنی هموار انتخاب کنیم

حداقل یک نقطه به طول c روی این منحنی هست به طوری که خط مماس در نقطه c موازی بااره خطی

است که دو نقطه A و B را به هم وصل می‌کند.



از قضیه مقدار میانگین بیشتر در اثبات قضایای دیگر استفاده می‌شود. خطی‌ها، قضیه مقدار میانگین را
 مهمترین قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌نامند.

مثال ① تابع $f(x) = \frac{5x-4}{x}$ را در نقطه بررسی. نشان دهید که تابع f در بازه $[1, 4]$ در شرایط

قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند و برای c هایی در بازه $(1, 4)$ پیدا کنید که وجودشان بنابر قضیه

مقدار میانگین تضمین شده است.

حل: تابع f خارج قسمت دو تابع مشتق پذیر است و چون مخدج کرده شده در بازه $[1, 4]$

صفر نمی‌شود پس این تابع در $[1, 4]$ پیوسته و در بازه $(1, 4)$ مشتق پذیر است پس بنابر قضیه

مقدار میانگین حداقل یک c در $(1, 4)$ هست به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

چون $f'(x) = \frac{4}{x^2}$ پس $\frac{4}{c^2} = \frac{4-1}{4-1}$ در نتیجه $c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm 2$ به دست می‌آید که فقط $c = 2$ در بازه $(1, 4)$ قرار دارد.

مثال (۲): در تابع $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ چند عدد حقیقی C مربوط به قضیه مقدار میانگین در بازه $[3, 4]$ وجود دارد؟

حل: بنا بر قضیه مقدار میانگین، عدد حقیقی C وجود دارد به طوریکه

$$f'(C) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - (3)} \Rightarrow \frac{-C}{\sqrt{25-C^2}} = \frac{3-4}{4-(3)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{25-C^2} = -C \Rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس یک عدد حقیقی وجود دارد.

قضیه مقدار میانگین گسلی: فرض کنیم توابع f و g بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق داشته باشند. همچنین g در هر نقطه از (a, b) ناصفر باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند C در (a, b) هست به طوریکه:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}$$

نتیجه: با فرض عدد حقیقی a به طوریکه $a \neq 1$ ، اگر $y = a^x$ را به عنوان تابعی در قیاس a گفته و با a نشان می‌دهیم. بنا بر این $a^0 = 1$ و $a^1 = a$ و چون a برای عدد حقیقی به داریم $a^x = y$ یا به عبارت دیگر $x = \log_a y$ یا به عبارت دیگر $x = \log_a y$ برای اعداد مثبت تعریف می‌شود.

توابع لگاریتمی و عکای و مستقیم آنها:

تابع گارانتی طبیعی را به صورت $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ تعریف می‌کنیم.

$$\ln a = \log_e a$$

مثال: مقدار $\ln ab - \ln a$ را به وسیله

$$\ln ab - \ln a = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt - \int_1^a \frac{1}{t} dt = \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt + \int_1^a \frac{1}{t} dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt$$

و ویژگی‌های تابع لگاریتم طبیعی:

۱- دامنه تابع $\ln x$ بازه $(0, +\infty)$ است.

۲) مشتق $\ln x$ برابر $\frac{1}{x}$ است یعنی $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

در $y = a^x \rightarrow y' = \frac{1}{a^x} \ln a$

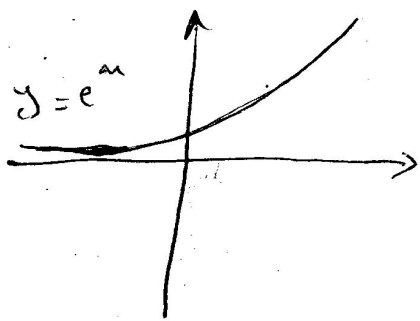
در $y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$

مثال ۲) $y = \ln(u + \sqrt{u^2 + 4}) \Rightarrow y' = \frac{(u + \sqrt{u^2 + 4})'}{u + \sqrt{u^2 + 4}} = \frac{1 + \frac{2u}{\sqrt{u^2 + 4}}}{u + \sqrt{u^2 + 4}}$

$$= \frac{(u + \sqrt{u^2 + 4})}{(\sqrt{u^2 + 4})(u + \sqrt{u^2 + 4})} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

تابع عکسی

تابع عکسی: وارون تابع $f(u) = \ln u$ و تابع عکسی گفته و بنا بر $e^{\ln(u)}$ عکس می دهیم.
خواص تابع عکسی: چون $e^{\ln(u)}$ وارون تابع $\ln u$ است پس:



- ۱- دامنه تابع $f(u) = e^{\ln(u)}$ محور اعداد حقیقی است
- ۲- برر تابع $f(u) = e^{\ln(u)}$ بازه $(0, +\infty)$ است
- ۳- تابع $f(u) = e^{\ln(u)}$ صعودی است
- ۴- $e^{\ln(u)} = u \quad u > 0$
- ۵- $\ln(e^{\ln(u)}) = \ln u \quad u \in \mathbb{R}$

تعریف: برای هر عدد حقیقی u ، e^u به صورت $e^u = e^{\ln(u)}$ تعریف می شود.
مشتق تابع عکسی: ۱) $(e^u)' = e^u$ ۲) اگر u تابعی متغیر باشد $(e^u)' = u' e^u$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید

الف) $y = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = (e^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

ب) $y = e^{e^x} \Rightarrow y' = (e^{e^x})' = (e^x)' e^{e^x} = e^x e^{e^x}$

ویژگیهای تابع عکسی:

۱) $e^{\ln u} = u$

۲) $e^u \cdot e^y = e^{u+y}$

۳) $e^{-u} = \frac{1}{e^u}$

۴) $\frac{e^u}{e^y} = e^{u-y}$

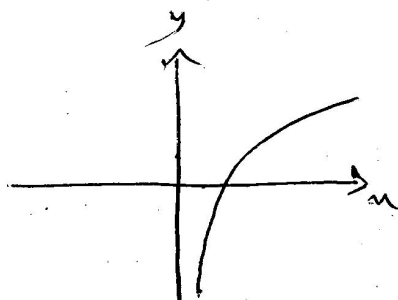
۵) $(e^u)^y = e^{uy}$

۲۱ (۱۸)

(۴) تابع $\ln x$ در دامنه اش صعودی است

(۵) تابع $\ln x$ در دامنه اش پیوسته و مشتق پذیر است

۵- نمودار تابع $f(x) = \ln x$ به صورت



(۶) در $\ln x$ تمام اعداد حقیقی است

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad (۷)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad (۸) \quad \ln 1 = 0 \quad (۹)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad (۱۰)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln x^r = r \ln x \quad (۱۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (۱۲) \quad \ln e = 1 \quad (۱۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad (۱۴)$$

مشتق تابع $\ln x$ را می توانیم به دست آوریم. اگر $u(x) > 0$ و $u'(x)$ باشد $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید

$$y = \ln(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب)} \quad y = \ln \frac{x^2(x+1)}{(x-2)^3} \Rightarrow$$

از خواص $\ln$ استفاده کرده و در فرم

$$= 2 \ln x + \ln(x+1) - 3 \ln(x-2) \Rightarrow y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-2}$$

۲۴

مثال: حاصل $e^{2 \ln x} + e^{-\ln x}$ ، اسی سہ کیلئے

$$e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = e^{\ln 9} = 9$$

$$e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 9 + \frac{1}{x} = \frac{47}{x}$$

اگر $y = e^{e \ln x}$ آگاہ y' کی رابستہ اورید

$$\Rightarrow y = e^{e \ln x} = (e^{\ln x})^e = x^e \Rightarrow y' = e x^{e-1}$$

سب سے پہلے جواب $(e^e)^{\ln x}$ رابستہ اورید

حل: $y = e^{e \ln x}$ کی رابستہ اورید

$$(e^e)^{\ln x} = (e^{\ln x^e})^{\ln x} = (e^{1 + \ln x})^{\ln x} = (e^{\ln x})^{1 + \ln x} = x^{1 + \ln x}$$

مثال: اگر $e^y = y + \ln x$ آگاہ y' کی رابستہ اورید

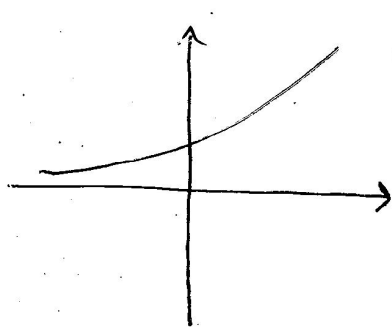
$$\Rightarrow y' = - \frac{f'_x}{f'_y} = - \frac{\frac{1}{x}}{1 - e^y} = \frac{-1}{x(1 - e^y)}$$

$$= \frac{-1}{x(1 - y - \ln x)} = \frac{1}{x(y - 1 + \ln x)}$$

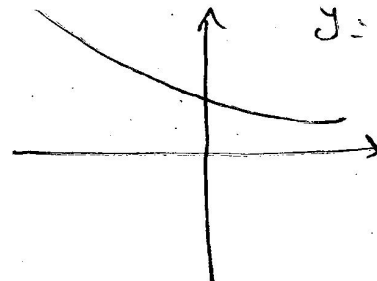
مثال: حاصل $\exp(\ln x - 2 \ln y)$ ، رابستہ اورید

$$\begin{aligned} \exp(\ln x - 2 \ln y) &= \exp(\ln x - \ln y^2) = \exp\left(\ln \frac{x}{y^2}\right) \\ &= e^{\ln \frac{x}{y^2}} = \frac{x}{y^2} \end{aligned}$$

تابع توان: برای $a > 0$ و $a \neq 1$ تابع $f(x) = a^x$ تابع توان نامیده می شود که دامنه آن $\mathbb{R}$ و بردار آن $(0, +\infty)$ است. حال برای $0 < a < 1$ این تابع نزولی آید و برای $a > 1$ صعودی آید.



$y = a^x$ برای $a > 1$



است $0 < a < 1 \Rightarrow$

در حالت کلی داریم: $a^x = e^{x \ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

خواص تابع توان: ۱- دامنه تابع a^x ، مجموعه اعداد حقیقی است ۲- بر تابع a^x ، $a > 0$ و $a \neq 1$ است.

۳- تابع a^x در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر است (۴) $\ln a^x = x \ln a$

(۵) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (۶) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ (۷) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ (۸) $(a^x)^y = a^{xy}$

مشتق تابع توان:

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ و $(a^u)' = u' a^u \ln a$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید

الف) $y = \pi^{\sin x} \Rightarrow y' = (\pi^{\sin x})' = (\cos x) \pi^{\sin x} \cdot \ln \pi$

ب) $y = 2^{x \ln 2} \Rightarrow y' = (2^{x \ln 2})' = (x \ln 2)' 2^{x \ln 2} \cdot \ln 2 = (\ln 2 + 1) 2^{x \ln 2} \cdot \ln 2$

ج) اگر $a^2 + e^{xy} + y^2 = 1$ را نسبت به y رابست آوریم

از مشتق گیری ضمنی استفاده کرده داریم

$y' = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{2y + ye^{xy}}{2x + ye^{xy}}$

خواص $\log$: ۱- $\log_a a = 1$ (ب) $\log_a 1 = 0$ (ج) $\log_a^m = \frac{1}{m} \log_a$ (د) $\log_a^m = m \log_a$ (ه) $\log_a^m = \log_a^m - \log_a^m$ (ز) $\log_a^m = \frac{1}{n} \log_a^m$ (ح) $\log_a^m = \log_a^m \times \log_a^m$ (ط) $\log_a^m = \frac{c}{n} \log_a^m$ (ی) $\log_a^m = \log_a^m$ (ک) $\log_a^m = \log_a^m$ (ل) $\log_a^m = \log_a^m$ (م) $\log_a^m = \log_a^m$ (ن) $\log_a^m = \log_a^m$ (س) $\log_a^m = \log_a^m$ (ص) $\log_a^m = \log_a^m$ (ض) $\log_a^m = \log_a^m$ (ط) $\log_a^m = \log_a^m$ (ز) $\log_a^m = \log_a^m$ (ح) $\log_a^m = \log_a^m$ (خ) $\log_a^m = \log_a^m$ (د) $\log_a^m = \log_a^m$ (ب) $\log_a^m = \log_a^m$ (ا) $\log_a^m = \log_a^m$

تابع های به صورت $f(u) = g(u)$ را تابع غایبی تعمیم یافته می گویند برای مشتق گیری از این نوع توابع قرار می دهیم

$$f(u) = g(u) \Rightarrow \ln f(u) = \ln g(u) \Rightarrow \ln y = g(u) \Rightarrow \ln y = g(u) \ln f(u)$$

حال از طرفین مشتق می گیریم

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(u) \Rightarrow y' = y \cdot g'(u)$$

$$\ln y = n \ln u \Rightarrow \ln y = \ln u^n \Rightarrow \ln y = n \ln u \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow y' = y \cdot n \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

آنگاه از طرفین مشتق می گیریم

$$(\ln y)' = (n \ln u)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln u + \frac{1}{u} \cdot n \Rightarrow y' = y (1 + \ln u)$$

در حال مثال را باقی بگذار

$$\Rightarrow y' = u^n (1 + \ln u)$$

مثال: از $y = (\ln u)^{\ln u}$ مشتق بگیر

حل: از طرفین معادله فوق لگاریتم طبیعی می گیریم داریم

$$\ln y = \ln (\ln u)^{\ln u} \Rightarrow \ln y = \ln u \ln (\ln u)$$

به مشتق گیری از طرفین

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{u} \ln (\ln u) + \ln u \cdot \frac{1}{\ln u} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{u} [1 + \ln (\ln u)]$$

در اینجا

$$\Rightarrow y' = \frac{1 + \ln (\ln u)}{u} \cdot (\ln u)^{\ln u}$$

در اینجا $\ln u$ را به عنوان x در نظر بگیریم و $\ln u$ را به عنوان y در نظر بگیریم. در این صورت $y = x^x$ و $x = \ln u$ و $y' = \frac{1 + \ln (\ln u)}{u} \cdot (\ln u)^{\ln u}$

تقریباً اگر $a > 1$ و $a \neq 1$ در این صورت تابع a^x وارون پذیر است. وارون تابع $f(u) = a^u$ را تابع $f(u) = \log_a u$ می گویند.

$$\log_a a^x = x \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow x = y$$

اعداد متقارن و متعادل را با هم مقایسه می کنیم

خواص تابع لگاریتم: ۱- (اعداد برابر با یکدیگر) ۲- (اعداد متعادل)

تابع $f(u) = \log_a u$ در دافه اش پیوسته و مشتق پذیر است. به ازای $a > 1$ و $a \neq 1$ تابع $f(u) = \log_a u$

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0, \log_a \frac{1}{a} = -1$$

۲۶

$$(\log_a u)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}$$

مثال: $\log_a u$

مثال: از $f(u) = \log_p [\log_r (\log_s u)]$ مشتق بگیرید

حل: بنابر قاعده زنجیری داریم

$$[f(g(h(u)))]' = h'(u) g'(h(u)) f'(g(h(u)))$$

$$f'(u) = \left(\frac{1}{\ln r} \cdot \frac{1}{u} \right) \left(\frac{1}{\ln r} \cdot \frac{1}{\log_r u} \right) \left(\frac{1}{\ln s} \cdot \frac{1}{\log_s (\log_r u)} \right)$$

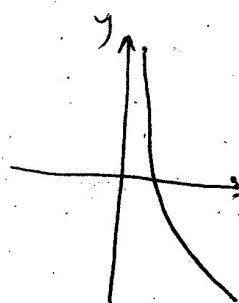
$$= \frac{1}{(\ln r)^2} \cdot \frac{1}{u (\log_r u) [\log_r (\log_r u)]}$$

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

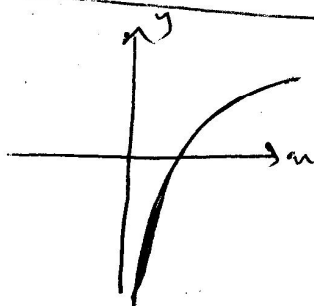
$$\log_e u = \ln u$$

$$u = a^{y \log_a u}$$

$$u^{\log_a u} = y^{\log_a u}$$



و اگر $0 < a < 1$



معادله $y = \log_a u$ را از a جدا

در بیان مسئله

چندتا (نمونه)

۱- اگر $y = \log_a u \leftarrow \ln(u+y) - \ln(u-y) = \epsilon$

$$\Rightarrow \ln \frac{u+y}{u-y} = \epsilon \Rightarrow \frac{u+y}{u-y} = e^\epsilon \quad (u+y) = (u-y)e^\epsilon$$

$$\Rightarrow (1+e^\epsilon)y = (e^\epsilon - 1)u \Rightarrow (1+e^\epsilon)y = e^\epsilon - 1 \Rightarrow y = \frac{e^\epsilon - 1}{e^\epsilon + 1}$$

۲- اگر $y = \log_a u \leftarrow y = a^{\delta} e^{-\epsilon \ln a}$ با استفاده از خواص توان و لگاریتم داریم

$$\Rightarrow e^{-\epsilon \ln a} = e^{\ln a^{-\epsilon}} = a^{-\epsilon} \Rightarrow y = a^{\delta - \epsilon} = a^{\epsilon} \Rightarrow y = 2a$$

(۴) حاصل عبارت $e^{-\ln 2} + \ln e^{-2}$ را بدست آورید.

$$= (e^{\ln 2})^{-1} - 2 \ln e = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

(۵) اگر $y = t^u$ و $u = t - \frac{1}{t}$ و $t = \ln a$ باشد، مشتق نسبت به a را بدست آورید. $a = e$

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{da} = (1 + t^2 u) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \left(\frac{1}{a}\right)$$

اگر $a = e$ داریم $t = 1$ و $u = 0$

$$\left. \frac{dy}{da} \right|_{a=e} = (1 + 0) (1 + 1) \left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

(۵) اگر $a > 0$ و $f(a) = a^{\sin a}$ باشد، $f'(a)$ را بدست آورید.

$$\rightarrow y = a^{\sin a} \Rightarrow \ln y = (\sin a)(\ln a) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\sin a}{a} + (\cos a) \ln a$$

$$\Rightarrow y' = y \left[\frac{\sin a}{a} + (\cos a) \ln a \right] \Rightarrow y' = a^{\sin a} \left[\frac{\sin a}{a} + (\cos a) \ln a \right]$$

توابع هذلولوی (هیپربولیک): در این بخش ترکیبهای خاصی از توابع نمایی e^x و e^{-x} را بررسی می‌کنیم. از این توابع در حل مسائل و نیزهائی در هندسه و آنالیزهای نامعین استفاده می‌شود.

تعریف: تابع سینوس هیپربولیک با نماد $\sinh$ و قلمرو در آن مجموعه تمام اعداد حقیقی هستند و $\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$ تعریف می‌شود.

$$\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

قلمرو: مجموعه تمام اعداد حقیقی و بردار آن مجموعه تمام اعداد در بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

تابع $\sinh x$ یک تابع فرد است چون

$$\forall u \in D_f \rightarrow -u \in D_f \rightarrow f(-u) = -f(u)$$

$$\Rightarrow \sinh(-u) = \frac{e^{-u} - e^{-(-u)}}{2} = \frac{e^{-u} - e^u}{2} = -\frac{e^u - e^{-u}}{2} = -f(u)$$

و $\cosh u$ هم زوج است چون

$$\forall u \in D_f \rightarrow -u \in D_f \text{ و } f(-u) = f(u)$$

$$\cosh(-u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{e^{-u} + e^u}{2} = f(u) = \cosh u$$

سپ زوج است توابع زوج نسبت به محور y هستند و توابع فرد نسبت به محاورات متناوبه

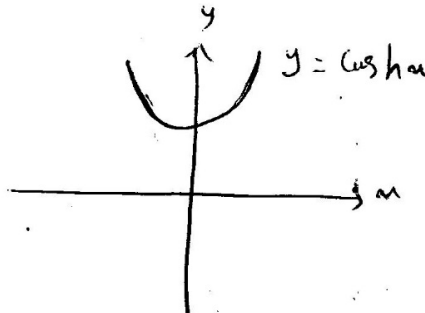
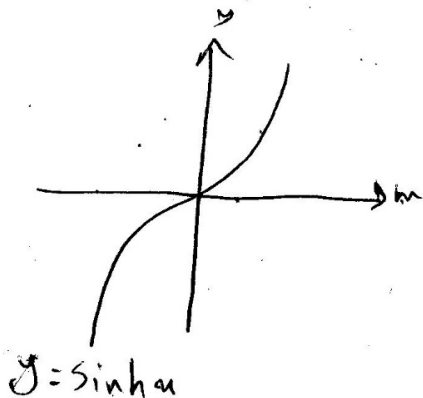
$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{\frac{e^u - e^{-u}}{2}}{\frac{e^u + e^{-u}}{2}} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \quad \text{حال در ادامه}$$

(فرد است)

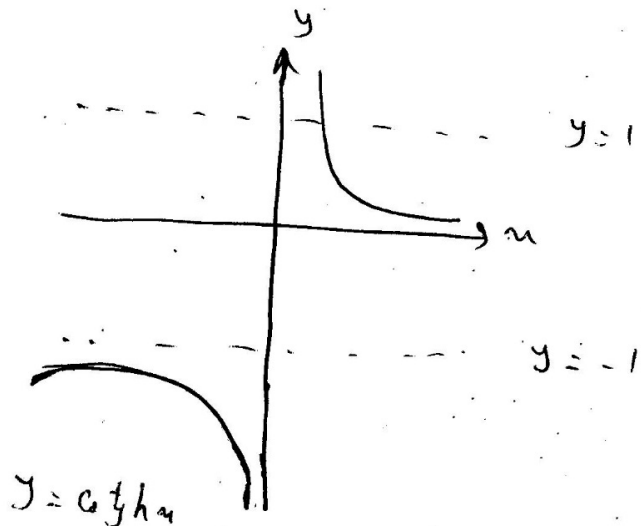
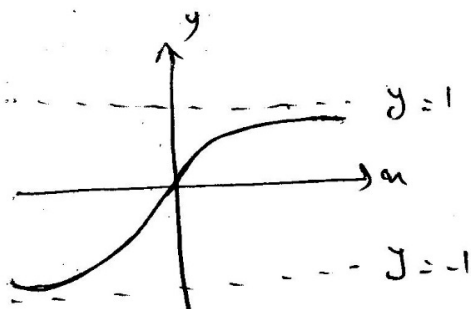
$$\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u} = \frac{\frac{e^u + e^{-u}}{2}}{\frac{e^u - e^{-u}}{2}} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} \quad \text{فرد}$$

$$\operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{1}{\frac{e^u + e^{-u}}{2}} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} \quad \text{(زوج است)}$$

$$\operatorname{csch} u = \frac{1}{\sinh u} = \frac{1}{\frac{e^u - e^{-u}}{2}} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}$$



غوره ها

 $y = \tanh u$ $y = \coth u$

اگر f تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد در اینصورت برای هر $x \in [a, b]$ مقدار $\int_a^x f(t) dt$ عددی است حقیقی در نتیجه $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ یک تابع بر بازه $[a, b]$ است.

قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال: فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است در این صورت

تابع $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ روی $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر است و داریم

$$F'(x) = f(x) \quad \text{به عبارت دیگر} \quad \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

انتگرال معین نسبت به متغیری که در حد بالا یا پایین قرار دارد برابر است با تابع زیر انتگرال به ازای آن متغیر

برای مثال چون $\int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x - \arctan a$ داریم $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt \right) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\left(\int_a^x \sqrt{1+t^2} dt \right)' = \sqrt{1+x^2}$$

حال قبل از بیان قضیه دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف تابع اولیه را به اینصورت بیان می کنیم

یک تابع $F(x)$ تابع اولیه f روی بازه $[a, b]$ است هرگاه $F'(x) = f(x)$

قضیه اساسی دوم: فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته است اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{در حقیقت قضیه بیان می کند که برای هر} \quad \int_a^b f(x) dx$$

غنی است یک تابع اولیه $f(x)$ را به دست آوریم و مقدار این تابع اولیه را در نقاط انتگرالی بازه انتگرال بگیرد

غاری به انتگرال معین: به جای نوشتن $F(b) - F(a)$ معمولاً می نویسیم $F(x) \Big|_a^b$ یعنی

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثالها و موارد دیگر: برای انتگرال نامعین بیان می گردد

انتگرال نامعین: تاکنون با مسائل سروکار داشتیم به اینصورت که ((تابعی داده شده است حال مشتق آن

را در بسیاری از جاها پیدا کردیم یا عکس این مسائل را به روشی سوم یعنی ((مشتق تابعی داده شده است حال تابع

برای مثال مثال فرض کنید می خواهیم تابعی مانند f را پیدا کنیم به طوری که $F'(x) = f(x)$ باشد

از فرمولهای مشتق به سادگی می توان گفت که یکی از این تابع $F(x) = x^2$ است زیرا $(x^2)' = 2x = f(x)$

(17)

داین معلوم است که انتگرال نامعین به خلاف انتگرال عین که عدد است، تابع (بعلاوه ثابت) دگونی می‌باشد

تابع $F(x) = x^2$ را یک تابع اولیه یا پاد مشتق x^2 می‌گویند

تعریف: ریش همه تابع اولیه‌های یک تابع: اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ای از $f(x)$ باشد آن‌گاه برای هر مقدار ثابت C به تابع $F(x) + C$ نیز تابع اولیه‌ای از $f(x)$ است. ضمناً هر تابع اولیه $f(x)$ را می‌توان به صورت $F(x)$ به علاوه یک مقدار ثابت بیان کرد. به طور خلاصه $\int f(x) dx = F(x) + C$ که در آن $F(x)$ یک تابع اولیه f است به عبارت دیگر $F'(x) = f(x)$ حال چون دو عمل متق‌گیری و اشتغال‌گیری عکس یکدیگرند بنابراین

$$\int F'(x) dx = F(x) + C \quad \text{و} \quad \left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

با استفاده از مطالب فوق نتایجی درمورد هر فرمول متق و اشتغال بدست می‌دهد
مثال: مطلوب است $\int \sin x dx$ از فرمول‌های عین بدست آورده‌اند

حل: دنبال فرمولی از متق می‌گردیم که در آن متق تابعی برابر $\sin x$ باشد می‌دانیم $(\cos x)' = -\sin x$ برای این بر آن مقدار $-\sin x$ این فرمول را به صورت $(\cos x)' = -\sin x$ می‌نویسیم از این فرمول به فرمول اشتغال‌گیری $\int \sin x dx = -\cos x + C$ می‌رسیم

مثال: مطلوب است $\int \frac{1}{x} dx$ به سبب

حل: باید فرمولی را پیدا کرد که متق تابعی برابر $\frac{1}{x}$ باشد می‌دانیم $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ از سوی دیگر

$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}$ پس $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ در نتیجه به فرمول $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ می‌رسیم

دسته بندی مسائل اشتغال: دسته اول: اشتغال‌هایی که به شکل $\int x^n dx$ یا $\int x^n dx$ با $n \neq -1$ درمی‌آیند در $\int x^n dx$ چون n هر عدد حقیقی بعزا - را می‌تواند اختیار کند پس این نوع اشتغال‌ها به شکل‌های گوناگونی ظاهر می‌شوند مثلاً همه اشتغال‌های

$$\int x^n dx, \int \sqrt{x} dx, \int x^{\frac{1}{2}} dx, \int x^{\frac{1}{3}} dx, \int x^{\frac{1}{4}} dx$$

برای ما به این نوع اشتغال‌ها با استفاده از فرمول‌های $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ و $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ اختیار می‌دهیم صورت

$$\int x^n dx \text{ درمی‌آوریم و سپس با استفاده از فرمول} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ اشتغال مورد نظر را حل می‌کنیم}$$

مثال: مطلوب است $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ به سبب

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

(۴۱)

مطلوب است می بینیم

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

حال در ادامه چند تا فرمول اشتدال را معرفی می کنیم

چون $(\sin u)' = \cos u$ $(-\cos u)' = \sin u$ $(\sec u)' = \sec u \tan u$ $(\csc u)' = -\csc u \cot u$ $(e^u)' = e^u$ $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}$

1) $\int 1 du = u + C$ 2) $\int \sin u du = -\cos u + C$ 4) $\int \cos u du = \sin u + C$

3) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2}$

5) $\int (1+\tan^2 u) du = \int \sec^2 u du = \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$

6) $\int (1+\cot^2 u) du = \int \csc^2 u du = \int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

7) $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$ چون $(\sec u)' = \sec u \tan u$

8) $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$ چون $(-\csc u)' = \csc u \cot u$

9) $\int e^u du = e^u + C$ چون $(e^u)' = e^u$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$ چون $(\arcsin u)' = (\sin^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

11) $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$ چون $(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}$

مربوط به دسته اول: در صورتی که صورت و مخرج چندضلعی باشند و در هر صورت از راجع خارج تر از راجع باشد

صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می کنیم (تقریب)

مثال: $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2+1} dx$

$= \int (\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}) dx = \int (x^2-1) dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$

حالا چند اشتدال مبتدائی ساده با استفاده از فرمولهای اشتدال

$\int \frac{\sin u}{\cos u} du = \sec u + C$ $\int \frac{\cos u}{\sin u} du = -\csc u + C$

حل صورت و مخرج عبارت $\frac{1}{1+\cos u}$ را در $1-\cos u$ ضرب می کنیم داریم



$$\frac{1}{1+\cos u} = \frac{1-\cos u}{(1+\cos u)(1-\cos u)} = \frac{1-\cos u}{1-\cos^2 u} = \frac{1-\cos u}{\sin^2 u} = \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{\cos u}{\sin^2 u}$$

بر روش دیگری

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1+\cos u} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 u} - \frac{\cos u}{\sin^2 u} \right) du = \int \frac{du}{\sin^2 u} - \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du$$

(6) , 8

$\frac{\cos u}{\sin^2 u} = \frac{1}{\sin u} \cdot \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{\sin u} \cdot \frac{1}{\tan u} = \frac{1}{\sin u \tan u}$

$$= -\cot u + \csc u + C$$

مثال ۱

$$\int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du = \int \frac{\cos u}{\sin u} \cdot \frac{1}{\sin u} du = \int \cot u \cdot \csc u du = -\csc u + C$$

برای تمرین ۱

$$\int \frac{du}{\sec u - 1} \quad \text{یا} \quad \int \frac{du}{1+\sin u}$$

صورت و مخرج را در $1-\sin u$ ضرب

$$\int \frac{du}{1+\sin u} = \frac{1}{1+\sin u} = \frac{1-\sin u}{(1+\sin u)(1-\sin u)}$$

$$= \frac{1-\sin u}{1-\sin^2 u} = \frac{1-\sin u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} - \frac{\sin u}{\cos^2 u} \Rightarrow \int \frac{du}{1+\sin u} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 u} - \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right) du$$

(5) استفاده از فرمولهای انتگرال

(7)

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} - \int \sec u \tan u du = \tan u - \sec u + C$$

(X) (تمرین)

$$\int \frac{du}{\sec u - 1} = \int \frac{du}{\frac{1-\cos u}{\cos u}} = \int \frac{\cos u du}{1-\cos u} \rightarrow \text{صورت و مخرج را در } 1+\cos u \text{ ضرب}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos u (1+\cos u)}{1-\cos^2 u} du = \int \frac{\cos u + \cos^2 u}{\sin^2 u} du = \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du + \int (\cot^2 u + 1) du$$

$$= -\csc u - \cot u - u + C$$

انتگرال گیری باروشن تعویض متغیر:

اگر u تابعی متعلق به یک جرم باشد و $F(u)$ یک تابع اولیه $f(u)$ باشد (یعنی $f(u) du = F(u)$)

$$\int f(u) du = F(u) + C \quad \text{به عبارات دیگر} \quad \int f(u) u' du = F(u) + C$$



فرض فوق وقتی به کاری رود که ما نخواهیم اشتغال ترکیب دو تابع را به دست آوریم مثلاً $\sin u$ را حساب کرده ایم. فرض کنید در این اشتغال به جای u تابعی مانند $(\delta u + 1)$ قرار گیرد یعنی اشتغال عبارت $\sin(\delta u + 1)$ وجود داشته باشد در صورت باید متوجه $(\delta u + 1)$ یعنی u هم در اشتغال وجود داشته باشد تا فرض $\sin u = -\cos u + C$ را بتوانیم به کار ببریم یعنی باید داشته باشیم $\sin(\delta u + 1)(1 + \delta u) du$ در صورت می توانیم چون اشتغال $\sin u$ برابر $-\cos u - C$ است پس

$$\sin(\delta u + 1)(1 + \delta u) du = -\cos u (\delta u + 1) + C$$

سپ ساده ترین نوع اشتغالها حالتی است که اشتغال ترکیب دو تابع بصورت $f(u)$ داریم و متوجه u هم در $f(u)$ ضرب شده یعنی ترکیبی بصورت $f(u)u'$ در اشتغال وجود دارد در این حالت اگر $f(u) du$ را برابر $f(u)u' du$ به راحتی بدست می آوریم

گاهی خود u وجود ندارد ولی با ضرب عددی و تقسیم بر آن در اشتغال u بوجود می آید فرض کنید می خواهیم $\int \cos(\delta u) du$ را حساب کنیم. با فرض $u = \delta u$ به متوجه u یعنی δ نیاز داریم که در اشتغال نیست پس می توانیم عدد δ را ضرب و تقسیم کنیم بنابراین اشتغال فرمول به شکل زیر در می آید

$$\int \cos(\delta u) du = \frac{1}{\delta} \int \cos(\delta u)(\delta) du = \frac{1}{\delta} \sin(\delta u) + C$$

زیرا فرض $u = \delta u \Rightarrow u' = \delta$ در اشتغال ضروری وجود دارد

مثال: یک تابع اولیه تابع $y = u^2(1 - u^2)$ را بدست آورید. (مدرین)

$$\int u^2(1 - u^2) du = -\frac{1}{3} \int \underbrace{(1 - u^2)}_{u'} \underbrace{(-u^2)}_{u'} du = -\frac{1}{3} \frac{(1 - u^2)^3}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{9} (1 - u^2)^3 + C$$

بصورتی روش اشتغال گیری با تفویض تغییر به این شرح است.

مرحله اول: یک تغییر متغیر مانند $u = g(x)$ انتخاب می کنیم معمولاً بهتر است تابع داخلی

یک تابع مرکب را u بنویسیم (در عبارتی به صورت $\sqrt{\delta u + 1}$ ، تابع داخلی، $\delta u + 1$ است و یا در عبارت $\sin^2 u$ تابع داخلی $\sin u$ است)

مرحله دوم: $du = g(u) du$ را می بینید. کاری می کنیم که تمام تابع زیر عبارت انتگرال بر حسب u باشد و هیچ x ای نباشد یعنی انتگرال را به شکل $\int f(u) du$ در می آوریم. مرحله ۳: انتگرال حاصل را بدست می آوریم. مرحله ۴: به جای u خور $g(u)$ را قرار داده و به این ترتیب جواب نهایی را به دست می آوریم.

$$\int \frac{(4u-1) du}{\sqrt{4u^2-2u+1}}$$

مثال: مطلوب است $\int$ می بیند

حل: مرحله اول: قرار می دهیم $u = 4u^2 - 2u + 1$ مرحله دوم: $du = (4u-2) du$ مرحله ۳: چون $du = 2(2u-1) du$ در نتیجه $(2u-1) du = \frac{du}{2}$ پس انتگرال مورد نظر به شکل

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \times \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C$$

$$\int \frac{(4u-1) du}{\sqrt{4u^2-2u+1}} = \sqrt{4u^2-2u+1} + C$$

مرحله ۴: چون $u = 4u^2 - 2u + 1$ پس در نهایت

مرحله دوم: انتگرالهایی که به صورت $\int u^n u' du$ تبدیل می شوند. اگر تابعی مشتق پذیر باشد آن u' است. مثال: $\int u^n u' du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $n \neq -1$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx = ?$$

حل: اگر قرار دهیم $u = \sin x$ در این صورت $u' = \cos x$ پس $du = \cos x dx$ (در نتیجه)

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{\arctan x}} = ?$$

مثال: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \sin u du$:

(اند) $\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{3}$

فرض می دهیم $u = \text{Arctg } x$ پس $du = \frac{dx}{1+x^2}$ نتیجه

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\text{Arctg } x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\text{Arctg } x} + C$$

~~عمرین~~

مثال: مطلوب است محاسبه $\int (1 - \cot^2 x) dx = ?$

حل: می دانیم $1 - \cot^2 x = (1 - \cot^2 x)(1 + \cot^2 x)$ پس $1 - \cot^2 x = \frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$
 می توانیم بنویسیم $u = \cot x$ پس $du = -(1 + \cot^2 x) dx$ نتیجه

$$\int (1 - \cot^2 x)(1 + \cot^2 x) dx = - \int (1 - u^2) du = - \int du + \int u^2 du$$

$$= -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cot x + \frac{1}{3} \cot^3 x + C$$

مثال $\int x^2(x-1)^2(1-x)^2 dx = ?$

$$\Rightarrow \int [x^2(x-1)^2]^2 (1-x)^2 dx = \int \underbrace{(x^2-x)^2}_{u^2} \underbrace{(1-x)^2}_{u'} dx$$

$$= \frac{1}{3} (x^2-x)^3 + C = (x^2-x)^3 + C$$

~~عمرین~~

~~عمرین~~

✓

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = ? = \int \frac{\ln x^{\frac{1}{r}}}{x} dx = \frac{1}{r} \int (\underbrace{\ln x}_u) (\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}) dx = \frac{1}{r} u^2 + C$$

$$\frac{1}{r} (\ln x)^2 + C$$

~~عمرین~~

~~عمرین~~

$$\int x(x^2+1)^{-2} dx = ? \Rightarrow \frac{d}{dx} \int \underbrace{x}_{u'} (\underbrace{x^2+1}_{u^2})^{-2} dx = \frac{d}{dx} x \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\frac{d}{dx} (x^2+1)^{-1} + C$$

دسته سوم: در این دسته استدلال‌هایی بررسی می‌شوند که بعد از تغییر متغیر متغیراً به شکل $\int u^n du$ درمی‌آیند
نکته: تابع زیر استدلال صحیح چندین بار از نوع u^n است

مثال:

$$\int x(x-2)^5 dx = ?$$

حل: قرار می‌دهیم $u = x-2$ پس $du = dx$ در نتیجه

$$\int x(x-2)^5 dx = \int x \times u^5 du$$

چون همه چیز باید در مص u باشد بنابراین از رابطه $u = x-2$ ، $x = u+2$ به صورت $x = u+2$ استفاده می‌کنیم

$$\Rightarrow \int x(x-2)^5 dx = \int (u+2)u^5 du = \int (u^6 + 2u^5) du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 + \frac{2}{6} u^6 + C = \frac{1}{7} (x-2)^7 + \frac{1}{3} (x-2)^6 + C$$

$$\text{مثال} \int \frac{12x^2 dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = ?$$

حل: قرار می‌دهیم $u = x^2+2x+2$ بنا بر این $du = (2x+2)dx$ پس داریم

$$\int \frac{12x^2 dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{x^2(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 2 \int \frac{x^2 du}{\sqrt{u}} = 2 \int \frac{(u-2) du}{2\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2} \int (u-2)u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int (u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}}) du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} \right) + C = \frac{1}{3} (x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}} - 2(x^2+2x+2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\text{مثال} \int \frac{x-2}{\sqrt{x+1}} dx = ?$$



حل: قرار می‌دهیم $u = x+1$ پس $du = dx$ در نتیجه $x = u-1$ بنا بر این $x-2 = u-3$

$$\Rightarrow \int \frac{(x-2) du}{\sqrt{u}} = \int \frac{(u-3) du}{\sqrt{u}} = \int (u^{\frac{1}{2}} - 3u^{-\frac{1}{2}}) du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 6u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - 6(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$