

1

General Mathematics1



General Mathematics

The writer: Dr. Amin Tanhaeiavash



ریاضی عمومی ۱

دانشگاه فنی کشاورزی مراغه

بخش دکتري تهائی و ش

سال ۹۹-۹۸

فهرست

آ	پیش‌گفتار	۱
۱	تابع	۱
۴	۱.۰.۱ مفهوم تابع	۴
۱۰	۲.۰.۱ انواع توابع	۱۰
۱۳	۳.۰.۱ دامنه	۱۳
۱۶	۴.۰.۱ ارتباط برخی توابع دامنه و توابع دیگر	۱۶
۲۲	۵.۰.۱ دامنه لگاریتم	۲۲
۲۷	۶.۰.۱ ترکیب توابع	۲۷
۲۸	۷.۰.۱ تابع مرکب	۲۸
۳۰	۸.۰.۱ معکوس توابع	۳۰
۳۱	۹.۰.۱ رسم نمودار توابع ساده به کمک نقطه‌یابی	۳۱
۳۲	۱۰.۰.۱ جزء صحیح	۳۲
۳۵	۲ حد و پیوستگی	۳۵
۳۶	۱۱.۰.۲ مروری بر اتحادها	۳۶
۳۷	۱۲.۰.۲ قضایای حد	۳۷

۴۳	حدود یک طرفه (حد راست و چپ)
۴۵	حدود نامتناهی و حد در بی نهایت
۴۹	مفهوم پیوستگی
۵۱	مثال‌های متعدد از حدها و قضایای حدی

۳ روابط مثلثاتی

۵۷	زاویه
۵۷	نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه
۵۸	نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی
۵۹	اتحادهای مثلثاتی
۶۱	جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص
۶۲	اتحادهای سینوس مجموع و تفاضل زوایا
۶۳	اتحادهای کسینوس مجموع و تفاضل زوایا
۶۴	اتحادهای تانژانت مجموع و تفاضل زوایا
۶۵	اتحادهای مجموع، تفاضل و ضرب توابع مثلثاتی
۶۶	توابع معکوس مثلثاتی
۶۷	معادلات مثلثاتی
۶۸	مشتق توابع مثلثاتی
۷۲	توابع هذلولی (هیپربولیک) و مشتق آنها

۴ مشتق

۷۵	تعریف مشتق
۷۸	تعریف مشتق یک طرفه
۷۹	مشتق ترکیب توابع و مشتق ضمنی

۸۰	 مشتق توابع لگاریتمی و نمایی	۳۳.۰.۴
۸۱	 مشتقات مرتبه بالاتر	۳۴.۰.۴
۸۲	 دیفرانسیل	۳۵.۰.۴
۸۳	 مشتق رادیکال	۳۶.۰.۴
۸۵	 مشتق‌گیری ضمنی	۳۷.۰.۴

۵ کاربرد مشتق

۸۷	 رسم خم با استفاده از مشتق اول	۳۸.۰.۵
۸۸		۳۹.۰.۵
۸۹	 توابع صعودی و نزولی	۴۰.۰.۵
۹۰	 آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی بودن	۴۱.۰.۵
۹۰	 مماس‌های افقی	۴۲.۰.۵
۹۱	 تقعر و نقطه‌ی عطف	۴۳.۰.۵
۹۲	 آزمون مشتق دوم برای تقعر	۴۴.۰.۵
۹۳	 نقطه عطف	۴۵.۰.۵
۹۵	 ماکسیمم و مینیمم	۴۶.۰.۵

۶ انتگرال

۹۹	 انتگرال نامعین	۴۷.۰.۶
۱۰۱	 روابط پر کاربرد انتگرال	۴۸.۰.۶
۱۰۳	 انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر	۴۹.۰.۶
۱۰۴	 انتگرال به روش جزء به جزء	۵۰.۰.۶
۱۰۶	 انتگرال‌گیری به روش جدول انتگرالی	۵۱.۰.۶
۱۰۷	 انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی	۵۲.۰.۶

۱۱۲ ۵۳.۰.۶ انتگرال معین

۱۱۴ ۵۴.۰.۶ خواص انتگرال معین

۱۱۷ مراجع

۱۲۰ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۲۵ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل اول

تابع

کتاب‌های مورد نظر جهت مطالعه و تدریس:

- ۱- کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (لوئیس لیتل) جلد ۱
ترجمه: مهدی بهزاد- سیامک کاظمی (مرکز نشر دانشگاهی)
 - ۲- کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (توماس) جلد ۱
 - ۳- کتاب ریاضیات مقدماتی
مؤلفین: صمد عهدی اقدم- اسماعیل علیزاده- رضا رضاپور (نشر شایسته)
 - ۴- کتاب ریاضی عمومی ۱ (رشته اقتصاد کشاورزی)
مؤلفین: محمد دهقاندار- میثم عسگری (دانشگاه پیام‌نور)
- جلسه اول

تعریف ۱.۰.۰.۱. (تعریف رابطه) فرض کنید A و B دو مجموعه باشند هر زیرمجموعه از $A \times B$ را یک رابطه (یا نسبت) از A به B گوئیم. بنابراین f یک رابطه از A به B است هرگاه $f \subseteq A \times B$.

به طور کلی رابطه f مجموعه‌ای است از اشیا به صورت (x, y) و هر یک از این اشیا یک عضو آن رابطه (یا نسبت) هستند. گزاره نمای $((x, y) \in f)$ که به صورت $(x f y)$ نیز نوشته می‌شود به معنی این است که زوج مرتب (x, y) عضو f می‌باشد و خوانده می‌شود:

(x نسبت f به y دارد) یا (بین x و y نسبت f برقرار است).

مثال ۲.۰.۱. فرض کنید $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ رابطه f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y \leq 4\}.$$

که این رابطه در صفحه مختصات به وسیله مجموعه نقاط $\{(1, 1), (1, 3), (2, 1)\}$ مشخص می‌شود. بنابراین

$$f = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1)\}$$

توجه ۳.۰.۱. توجه کنید که چون هر رابطه یک مجموعه هست، می‌توان مفاهیم و احکام مربوط به مجموعه‌ها را برای رابطه‌ها به کار برد. همچنین توجه کنید که هر زیرمجموعه یک رابطه خود رابطه است.

تعریف ۴.۰.۱. (تعریف اول تابع): فرض کنیم f رابطه‌ای از مجموعه A به مجموعه B باشد، f را یک تابع گوئیم هرگاه به ازای هر $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$ داشته باشیم $z = y$. به بیان دیگر تابع f ، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوت دارای مؤلفه اول یکسان نباشند.

- اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، آنگاه f را به صورت $f : A \rightarrow B$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۰.۱. (تعریف دوم تابع): ضابطه‌ای را تابع گوئند هرگاه برای هر x یک و فقط یک y موجود باشد.

روش اول: (۱) به x عدد بدهید. (۲) سعی کنید y را پیدا کنید.

(۳) اگر برای y دو جواب به دست آمد تابع نیست.

مثال ۶.۰.۱. $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 10\}$ آیا f تابع است؟

پاسخ ۷.۰.۱.

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \underbrace{x=1} \mapsto 1^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 = 9 \mapsto y = \pm 3$$

دو جواب برای y به دست آمد لذا تابع نیست.

مثال ۸.۰.۱. $\frac{x-1}{y} = \frac{y+1}{x}$ تابع است؟

پاسخ ۹.۰.۱. $x = 2 \mapsto \frac{1}{y} = \frac{y+1}{2} \mapsto y^2 + y = 2 \mapsto y^2 + y - 2 = 0$

$$\mapsto \begin{cases} y = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

روش دوم: (۱) سعی کنید هر چیزی را به طرف دوم ببرید و y تنهای تنها بماند.

(۲) سپس سعی کنید y را بر حسب x پیدا کنید. (۳) اگر برای y یک جواب آمد، تابع است.

(۴) اگر برای y دو جواب آمد، تابع نیست.

مثال ۱۰.۰.۱.

$$x^4 + y^3 - x + 1 = 0 \longrightarrow y^3 = x - 1 - x^4$$

$$\longrightarrow y = \sqrt[3]{x - 1 - x^4}$$

تابع است.

$$\frac{y}{3x-1} = \frac{x}{y} \longrightarrow y^2 = 3x^2 - x \longrightarrow y = \pm \sqrt{3x^2 - x}$$

دو جواب برای y به دست آمد.

تمرین ۱۱.۰.۱. (الف) $\frac{y^2}{x-1} = \frac{x}{y^3}$

(ب) $|y-x| + |x-2| = 5$

پاسخ ۱۲۰۰۱. (الف) تابع است زیرا

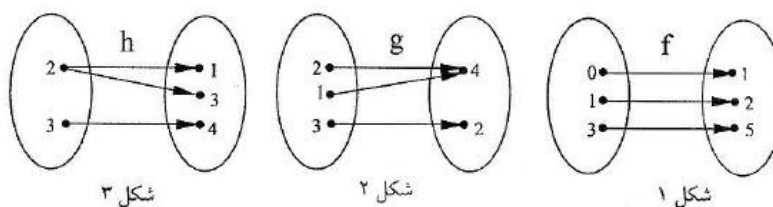
$$y^5 = x^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt[5]{x^2 - x}$$

(ب) تابع نیست زیرا

$$|y - x| = 5 - |x - 2| \rightarrow y - x = \pm(5 - |x - 2|)$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = x + (5 - |x - 2|) \\ y = x - (5 - |x - 2|) \end{cases}$$

دو جواب به دست آمد.



۱۰۰۱ مفهوم تابع



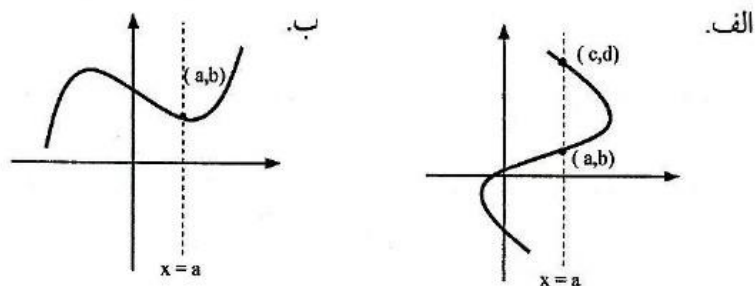
تعریف تابع به زبان ریاضی:

$$\forall x_1, x_2 \in Df \quad (x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)).$$

تشخیص تابع بودن از روی نمودار:

یک منحنی در صفحه xy نمودار تابعی از X است، اگر و فقط اگر هر خط قائم (یعنی هر خط موازی محور y ها) منحنی را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

مثال ۱۳.۰.۱.



تعریف ۱۴.۰.۱. تعریف تابع یک به یک: ضابطه f را یک به یک گویند هرگاه برای هر y یک و فقط یک x موجود باشد.

مثال ۱۵.۰.۱. آیا $x^2 + y^3 = 10$ یک به یک است؟

پاسخ ۱۶.۰.۱.

$$y = 2 \rightarrow x^2 + 2^3 = 10 \rightarrow x^2 + 8 = 10 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

روش اول: (۱) به y عدد دلخواه بدهید. (۲) سعی کنید x را پیدا کنید.

(۳) اگر برای x دو جواب آمد یک به یک نیست.

مثال ۱۷.۰.۱. آیا $|x - 1| + |y - 2| = 5$ ؟

پاسخ ۱۸.۰.۱.

$$y = 1 \quad |x - 1| + 3 = 5 \rightarrow |x - 1| = 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{cases}$$

به تناقض رسیدیم.

روش دوم: (۱) y را طرف دوم ببرید سعی کنید x تنهای تنها بماند.

(۲) سپس x را بر حسب y پیدا کنید.

(۳) اگر برای x یک جواب آمد یک به یک است. اگر برای x دو جواب آمد یک به یک نیست.

مثال ۱۹.۰.۱. آیا تساوی مقابل تابع است؟

$$\frac{y - 1}{x} = \frac{x}{y + 2}$$

پاسخ ۲۰.۰.۱.

$$y^2 - y + 2y - 2 = x^2 \rightarrow y^2 + y - 2 - x^2 = 0$$

توجه داشته باشد که در فوق ضریب y^2 برابر با a و ضریب y برابر با b و بقیه چند جمله ای در تساوی فوق همان

c خواهد بود. لذا $a = 1$, $b = 1$ و $c = -2 - x^2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(-2 - x^2)$$

$$\rightarrow \Delta = 1 + 8 + 4x^2 = 9 + 4x^2$$

$$\rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4x^2}}{2}$$

که به تناقض رسیدیم.

مثال ۲۱.۰.۱. آیا تساوی مقابل یک به یک است؟

$$\frac{2x-1}{y} = \frac{y^2}{x+3}$$

پاسخ ۲۲.۰.۱.

$$2x^2 + 6x - x - x - 3 = y^3 \rightarrow 2x^2 + 5x - 3 - y^3 = 0$$

توجه داشته باشد که در فوق ضریب x^2 برابر با a و ضریب x برابر با b و بقیه چند جمله ای در تساوی فوق همان

c خواهد بود. لذا $a = 2$, $b = 5$ و $c = -3 - y^3$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 25 - 4(2)(-3 - y^3)$$

$$\rightarrow \Delta = 25 - 8(-3 - y^3)$$

$$\rightarrow \Delta = 25 + 24 + 8y^3 = 49 + 8y^3$$

$$\rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49 + 8y^3}}{4}$$

که به تناقض رسیدیم.

تمرین ۲۳.۰.۱. آیا $(x-1)^4 + (y-1)^3 = 5$ یک به یک است؟

پاسخ ۲۴.۰.۱.

$$(x-1)^4 + (y+1)^3 = 5 \rightarrow (x-1)^4 = 5 - (y-1)^3$$

$$\rightarrow x-1 = \pm \sqrt[4]{5 - (y+1)^3}$$

به تناقض رسیدیم.

تمرین ۲۵.۰.۱. آیا $|x - ۱| + |y + ۳| = ۳$ تابع یک به یک است؟

پاسخ ۲۶.۰.۱.

$$|x - ۱| + |y - ۲| = ۳ \rightarrow |x - ۱| = ۳ - |y + ۲|$$

$$\rightarrow x - ۱ = \pm \{۳ - |y + ۲|\}$$

$$x^۲ = A \rightarrow x = \pm \sqrt{A} \quad (۱) \quad \text{نکته ۲۷.۰.۱}$$

$$x^۳ = A \rightarrow x = \pm \sqrt[۳]{A} \quad (۲)$$

$$x^۴ = A \rightarrow x = \pm \sqrt[۴]{A} \quad (۳)$$

$$|A| = A \rightarrow x = \pm A \quad (۴)$$

$$|x| = |z| \rightarrow x = \pm z \quad (۵)$$

تعریف ۲۸.۰.۱. تعریف تابع:

$$x = z \rightarrow f(x) = f(z)$$

تعریف ۲۹.۰.۱. تعریف یک به یک:

$$f(x) = f(z) \rightarrow x = z$$

در تابع اجزا را کنار هم قرار دهید و یک کل بسازید، در یک به یک کل را به هم میریزیم و به جزء می‌رسیم.

مثال ۳۰.۰.۱. تابع بودن $h(x) = \frac{۹}{۴x - ۲}$ و یک به یک بودن آن را نیز بررسی کنید؟

پاسخ ۳۱.۰.۱. بررسی تابع بودن:

$$\begin{aligned} x = z &\rightarrow 4x = 4z \rightarrow 4x - r = 4z - r \\ &\rightarrow \frac{1}{4x - r} = \frac{1}{4z - r} \rightarrow \frac{9}{4x - r} = \frac{9}{4z - r} \end{aligned}$$

لذا $f(x) = f(z)$ و تابع است. حال بررسی یک به یک بودن:

$$\begin{aligned} f(x) = f(z) &\rightarrow \frac{9}{4x - r} = \frac{9}{4z - r} \rightarrow 36z - 9r = 36x - 9r \\ &\rightarrow 36z = 36x \rightarrow x = z \end{aligned}$$

یک به یک نیز می باشد.

تمرین ۳۲.۰.۱. تابع بودن و یک به یک بودن $h(x) = \frac{5}{2x^3 - 9}$ را بررسی کنید.

پاسخ ۳۳.۰.۱. بررسی تابع بودن:

$$\begin{aligned} x = z &\rightarrow x^3 = z^3 \rightarrow 2x^3 = 2z^3 \rightarrow 2x^3 - 9 = 2z^3 - 9 \\ &\rightarrow \frac{1}{2x^3 - 9} = \frac{1}{2z^3 - 9} \rightarrow \frac{5}{2x^3 - 9} = \frac{5}{2z^3 - 9} \\ &\rightarrow f(x) = f(z) \end{aligned}$$

تابع می باشد. حال بررسی یک به یک بودن:

$$\begin{aligned} f(x) = f(z) &\rightarrow \frac{5}{2x^3 - 9} = \frac{5}{2z^3 - 9} \\ &\rightarrow 10x^3 - 45 = 10z^3 - 45 \rightarrow 10x^3 = 10z^3 \rightarrow x = z \end{aligned}$$

یک به یک نیز می باشد.

تمرین ۳۴.۰.۱. تابع $y = \sqrt{\frac{z}{9x^5 + 2}}$ یک به یک بودن را بررسی کنید.

۲.۰.۱ انواع توابع

تعریف ۳۵.۰.۱. (۱) اگر دامنه و برد تابع f زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی باشند در این صورت f را یک تابع حقیقی می نامیم.

(۲) اگر برد تابع f مجموعه ای یک عضوی باشد در این صورت تابع f را تابع ثابت می نامیم.

تابع $g(x) = 1$ یک تابع ثابت است و داریم:

$$R_f = \{1\}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

(۳) اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) = x$ تابع f را تابع همانی می نامیم روشن است که

$$R_f = \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

(۴) تابع $f(x) = ax + b$ را که در آن a و b اعداد حقیقی ثابتی هستند را تابع خطی می نامیم.

(۵) تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی می باشند و $a_n \neq 0$ را یک تابع چندجمله ای از درجه n می نامیم.

مثال ۳۶.۰.۱. تابع $f(x) = 3x^2 + 1$ یک چندجمله ای از درجه دو و تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ یک چندجمله ای از درجه سه می باشد.

(۶) اگر تابعی به صورت خارج قسمت دو تابع چندجمله ای بیان شود آن را یک تابع گویا می نامیم یک تابع

گویا در حالت کلی به صورت

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

(۷) تابع جبری تابعی است که از تعداد عمل جبری مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم به توان رساندن و ریشه گیری

تابع همانی و ثابت به دست می آید.

مثال ۳۷.۰.۱. تابع f با ضابطه زیر یک تابع جبری است

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{(x^2+3x-1)^2}$$

(۸) برای هر عدد حقیقی ثابت $a > 0$ و $a \neq 1$ تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ با ضابطه $f(x) = a^x$ را یک تابع

نمایی می نامیم.

و با توجه به خواص اعداد تواندار داریم:

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (\text{ب})$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (\text{ج})$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (\text{ت})$$

مثال ۳۸.۰.۱. تابع $f(x) = 2^x$ یک تابع نمایی است.

(۹) تابع $f(x) = a^x$ تابعی یک به یک می باشد لذا این تابع دارای وارون می باشد. وارون این تابع را به

صورت $f(x) = \log_a x$ تعریف کرده و آن را تابع لگاریتم در مبنای a می نامیم.

نکته ۳۹.۰.۱. با توجه به تعریف تابع لگاریتم داریم

$$\log_a x = y \iff x = a^y$$

قضیه ۴۰.۰.۱. برای اعداد حقیقی مثبت x و y و عدد گویای r و عدد مثبت a داریم:

(الف)

$$a \neq 1; \quad \log_a 1 = 0$$

(ب)

$$a \neq 1; \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

(پ)

$$a \neq 1; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

(ت)

$$a \neq 1; \quad \log_a x^r = r \log_a x$$

(ج)

$$a \neq 1; \quad a^{\log_a x} = x$$

(ج)

$$y \neq 1; \quad \log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

(د)

$$x \neq 1; \quad (\log_a x)(\log_x a) = 1$$

نکته ۴۱.۰.۱. نمودار تابع $\log_a x$ قرینه نمودار تابع a^x نسبت به خط $y = x$ می باشد.

(۱۰) اگر مبنای لگاریتم را عدد ۱۰ اختیار کنیم، لگاریتم را لگاریتم معمولی یا اعشاری می نامیم در این

صورت مبنای لگاریتم را نمی نویسیم.

(۱۱) اگر مبنای لگاریتم را عدد e (عدد نیر که برابر است با $e = 2.7182$) اختیار کنیم، لگاریتم را لگاریتم

طبیعی یا نیری می‌نامیم و آن را با $\ln$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴۲.۰.۱. نمودار تابع $f(x) = \ln x$ به صورت زیر می‌باشد.

(۱۲) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه $f(x) = [x]$ که به صورت

$$[x] = n \iff n \leq x < n + 1$$

تعریف می‌شود را تابع جزء صحیح می‌نامیم. برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم.

(۱۳) تابع f را زوج می‌نامیم اگر به ازای هر x در دامنه f داشته باشیم:

$$f(-x) = f(x) \quad (۲) \quad -x \in D_f \quad (۱)$$

تابع f را فرد می‌نامیم اگر به ازای هر x در دامنه f داشته باشیم:

$$f(-x) = -f(x) \quad (۲) \quad -x \in D_f \quad (۱)$$

۳.۰.۱ دامنه

تعریف ۴۳.۰.۱. تعریف دامنه: در علم ریاضیات دامنه یک تابع عبارت است از مجموع مقادیر مجاز ورودی به یک تابع که منجر به تولید خروجی (برد) می‌شود. به بیان دیگر مؤلفه‌های اول هر تابع که به صورت زوج مرتب نوشته شده باشد را دامنه می‌گویند و به صورت Df نمایش می‌دهند.

پیدا کردن دامنه (۱) مخرج را صفر قرار دهید. (۲) ریشه مخرج را پیدا کنید.

$$D = R - \{x\} \quad (۳)$$

مثال ۴۴.۰.۱. دامنه عبارت مقابل را بیابید.

$$y = \frac{7x - 1}{3x^2 - x - 2}$$

پاسخ ۴۵.۰.۱

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 2 = 0 &\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 1 + 24 \\ &\rightarrow x = 1, -\frac{2}{3} \rightarrow D = R - \{1, -\frac{2}{3}\} \end{aligned}$$

تذکر ۴۶.۰.۱. در پیدا کردن دامنه شما حق ندارید با مخرج مشترک گرفتن دو کسر را به یک کسر تبدیل کنید.

مثال ۴۷.۰.۱. دامنه را در عبارت $y = \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{5}{x^2+2x}$ بیابید.

پاسخ ۴۸.۰.۱

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + 2x = 0 &\rightarrow x = 0, -2 \\ D = R - \{0, -2, -1, 1\} \end{aligned}$$

تمرین ۴۹.۰.۱. دامنه را در عبارت $y = \frac{2x-1}{x^2-4x} + \frac{x^3+1}{x^2-1} - \frac{x}{2x^2+x}$ بیابید.

پاسخ ۵۰.۰.۱

$$\begin{aligned} x^2 - 4 = 0 &\rightarrow x = 0, 4 \\ x^2 - 1 = 0 &\rightarrow x = 1, -1 \\ 2x^2 + x = 0 &\rightarrow x = 0, -\frac{1}{2} \\ D = R - \{0, 4, 1, -1, -\frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

تذکر ۵۱.۰.۱. در پیدا کردن دامنه حق نداریم صورت و مخرج را ساده کنیم حتی اگر صورت و مخرج قابل

حذف کردن باشند حق ساده کردن نداریم.

مثال ۵۲.۰.۱. دامنه را در عبارت $\frac{\frac{2x+1}{x+5}-2}{\frac{3x-1}{x-4}+4}$ بیابید.

پاسخ ۵۳.۰.۱.

$$x+5=0 \rightarrow x=-5$$

$$x-4=0 \rightarrow x=4$$

$$\frac{3x-1}{x-4}+4=0 \rightarrow \frac{3x-1}{x-4}=-4 \rightarrow -4x+16=3x-1$$

$$\rightarrow -7x=-17 \rightarrow x=\frac{17}{7}$$

$$\rightarrow D=R-\{-5, 4, \frac{17}{7}\}$$

توجه ۵۴.۰.۱. وقتی دامنه را پیدا می‌کنید باید هم خط کسری‌ها و هم مخرج‌ها را صفر قرار دهید.

تذکر ۵۵.۰.۱. اگر عبارتی دارای مخرج نباشد یا مخرج آن عدد باشد آنگاه $D=R$.

مثال ۵۶.۰.۱. دامنه دو عبارت ذکر شده در زیر برابر با R می‌باشد.

$$y=\frac{2x^2-7x+1}{9}, \quad y=5x^2-7x+1+(2x-1)^2$$

مثال ۵۷.۰.۱. دامنه را در $y=(2x^2-x-1)^{-2}+(x^2+x-2)^3$ بیابید.

پاسخ ۵۸.۰.۱.

$$\frac{1}{(2x^2-x-1)^2}+(x^2+x-2)^3 \rightarrow 2x^2-x-1=0 \rightarrow x=1, -\frac{1}{2}$$

$$D=R-\{1, -\frac{1}{2}\}$$

تذکر ۵۹.۰.۱. گاهی عبارت دارای مخرج پنهان است $(a^{-n}=\frac{1}{a^n})$.

۴.۰.۱ ارتباط برخی توابع دامنه و توابع دیگر

گاهی برای پیدا کردن دامنه باید خواص از توابع دیگر را بدانید.

$$|A| = A \rightarrow x = \pm A \quad (۱)$$

$$|x| = |z| \rightarrow x = \pm z \quad (۲)$$

$$[x] = k \rightarrow k \leq x < k+1 \quad (۳)$$

مثال ۴.۰.۱. $y = \frac{2x^2 - x - 1}{|4x - 7| - 2}$ ؟

پاسخ ۴.۰.۱.

$$|4x - 7| - 2 = 0 \rightarrow |4x - 7| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 7 = 2 \\ 4x - 7 = -2 \end{cases}$$

پس داریم $x = \frac{9}{4}$ و $x = \frac{5}{4}$. لذا خواهیم داشت $D = R - \{\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\}$.

مثال ۴.۰.۱. $y = \frac{2x - 1}{2[3x + 4] - 18}$ ؟

پاسخ ۴.۰.۱.

$$2[3x + 4] - 18 = 0 \rightarrow 2[3x + 4] = 18 \rightarrow [3x + 4] = \frac{18}{2} \rightarrow [3x + 4] = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9 \leq 3x + 4 < 10 \\ 5 < 3x < 6 \\ \frac{5}{3} \leq x < 2 \end{cases}$$

داریم $D = R - [\frac{5}{3}, 2)$. لذا $D = (-\infty, \frac{5}{3}] \cup (2, +\infty)$.

تمرین ۶۴.۰.۱. $y = \frac{5x-1}{2[3x-1]+5}$ ؟
پاسخ ۶۵.۰.۱.

$$2[3x-1]+5=0 \rightarrow 2[3x-1]=-5 \rightarrow [3x-1]=-\frac{5}{2}$$

غیر ممکن کسر $\neq$ صحیح

برخی توابع دامنه آنها R است و نیازی نیست برای آنها دامنه پیدا کنیم.

(۱) چندجمله‌ای‌ها

$$y = 2x^2 - x^3 - x - 1$$

(۲) توابع رادیکالی با فرجه فرد

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x - 1} - \sqrt[5]{x^2 + 7x}$$

(۳) توابع $\sin u$ و $\cos u$

$$y = \sin x + \cos 5x$$

(۴) توابع $\arctan u$ و $\operatorname{arccot} u$

$$y = \arctan(3x) + \operatorname{arccot}(2x)$$

(۵) توابع قدرمطلق

$$y = |4x^2 - x| - |2x - 1|$$

(۶) توابع نمایی a^u

$$y = \sqrt[2]{x-1} - \sqrt[4]{x+1}$$

(۷) کسرهایی که مخرج آنها عدد ثابت است.

$$y = \frac{2x^2 + x}{8}$$

(۸) توابع $[u]$

$$y = [3x - 1] + [x^2 + 1]$$

(۹) جمع، تفریق، ضرب و ترکیب این توابع هم دامنه آنها R است.

تعیین دامنه رادیکال: اگر فرجه زوج باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۱) زیر رادیکال را مشخص کنید.

(۲) زیر رادیکال را صفر قرار دهید.

(۳) زیر رادیکال را تعیین علامت کنید. (اگر مخرج داشت ریشه مخرج را هاشور بزنید).

(۴) قسمت‌های مثبت دامنه است.

مثال ۶۶.۰.۱. $y = 2x^2 - x - \sqrt[4]{4x-7}$ ؟

پاسخ ۶۷.۰.۱.

$$4x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{4} \rightarrow D = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$$

x	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
$4x-7$	-	+	////

مثال ٦٨.٠.١. $y = \sqrt{x^2 - 7x + 6} + 7x + 1$ ؟

پاسخ ٦٩.٠.١.

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 24 = 25 \rightarrow x = 1, 6 \rightarrow D = (-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$$

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$
$x^2 - 7x + 6$	+	-	+	

تمرین ٧٠.٠.١. $y = \sqrt{4 - 3x^2 - x} + 7x + 1$ ؟

پاسخ ٧١.٠.١.

$$4 - 3x^2 - x = 0 \rightarrow -3x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 48 \rightarrow x = 1, -\frac{4}{3}$$

لذا $D = [-\frac{4}{3}, 1]$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	1	$+\infty$
$-3x^2 - x + 4$	-	+	-	

مثال ٧٢.٠.١. $y = \frac{5x^2 - x - 1}{\sqrt{3x^2 + x - 4}}$ ؟

پاسخ ٧٣.٠.١.

$$3x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow x = 1, -\frac{4}{3}$$

چون عبارت در مخرج است ریشه مخرج را هاشور بزنید. $D = (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (1, +\infty)$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$		1	$+\infty$
$3x^2+x-4$	+	///	-	///	+

تمرین ۷۴.۰.۱. (الف) $y = \frac{5x-1}{\sqrt{3x-1}-3}$ (ب) $y = \frac{5x^2-7x}{\sqrt{3x-1}}$

پاسخ ۷۵.۰.۱. پاسخ الف:

$$3x-1=0 \rightarrow 3x=1 \rightarrow x=\frac{1}{3} \rightarrow D = [\frac{1}{3}, +\infty) - \{\frac{1}{3}\}$$

عدد $\frac{1}{3}$ حاصل از اینجاست:

$$\sqrt{3x-1}-3=0 \rightarrow (\sqrt{3x-1})^2 = (3)^2$$

$$\rightarrow 3x-1=9$$

$$\rightarrow 3x=10$$

$$\rightarrow x=\frac{10}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	-	///	+

پاسخ (ب)

$$3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow D = (\frac{1}{3}, +\infty)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	-	///	+

- گاهی دو عبارت، رادیکال جداگانه برای خودش دارد یعنی رادیکال‌ها جدا جدا هستند.

(۱) اجزاء را صفر قرار دهید.

(۲) اجزای تک تک را تعیین علامت کنید.

(۳) ریشه‌های مخرج را هاشور بزنید.

(۴) p را پیدا نکنید.

قسمت مثبت اول را بردارید. قسمت مثبتی خروجی را بردارید ناحیه مشترک دامنه است.

$$\text{مثال ۷۶.۰.۱} \quad y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-5}} \quad ?$$

پاسخ ۷۷.۰.۱

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1, \quad x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$D = (5, +\infty)$$

- گاهی دو عبارت مشترکا زیر یک رادیکال هستند یعنی دوتایی با هم یک رادیکال دارند.

(۱) اجزاء را تک تک صفر قرار دهید.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$x-1$	-	+	-	-
$x-5$	-	+	///	-

(۲) اجزا را تک تک تعیین علامت کنید.

(۳) ریشه‌های مخرج را هاشور بزنید.

(۴) p را پیدا کنید. قسمت‌های مثبت دامنه است.

مثال ۷۸.۰.۱. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{9 - x^2}}$ ؟

پاسخ ۷۹.۰.۱.

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$$

$$9 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow D = (-3, 0] \cup (3, 4]$$

x	$-\infty$	-3	0	3	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$		0	+	-	0	+
$9 - x^2$	-	+	0	+	-	0
	-	+	-	+	-	-

۵.۰.۱ دامنه لگاریتم

دامنه لگاریتم عین دامنه رادیکال است با این تفاوت که دامنه لگاریتم همیشه بازه باز است.

مثال ۸۰.۰.۱. $y = \log_4(5 - 7x) + 9x^2 - 1$ ؟

پاسخ ۸۱.۰.۱.

$$5 - 7x = 0 \rightarrow x = \frac{5}{7} \rightarrow D = (-\infty, \frac{5}{7})$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{7}$	$+\infty$
$5 - 7x$	+	-	

(۱) جلوی لگاریتم را مشخص کنید.

(۲) جلوی لگاریتم را صفر قرار دهید.

(۳) جلوی لگاریتم را تعیین علامت کنید.

(۴) قسمت‌های مثبت دامنه است، دامنه هم بازه باز است.

مثال ۸۲.۰.۱. $y = 4x^3 - x \log_3(7 + 5x)$ ؟

پاسخ ۸۳.۰.۱.

$$7 + 5x = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{5} \rightarrow D = (-\frac{7}{5}, +\infty)$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	$+\infty$
$7 + 5x$	-	+	

مثال ۸۴.۰.۱. $\log_8 \left(\frac{x-2}{x+3} \right)$ ؟

پاسخ ۸۵.۰.۱.

$$x-2=0 \rightarrow x=2, \quad x+3=0 \rightarrow x=-3 \implies D=(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

- گاهی رادیکال‌ها خود در تو می‌باشند در این مواقع حق نداریم از تعیین علامت استفاده کنیم.

$$\begin{cases} \sqrt{f} & f \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{f}} & f > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{f}-k} & f \geq 0 \end{cases}$$

مثال ۸۶.۰.۱. $y = \sqrt{5 - \sqrt{3 - 2x}}$ ؟

پاسخ ۸۷.۰.۱.

$$\begin{aligned} 3 - 2x \geq 0 &\rightarrow -2x \geq -3 \rightarrow x \leq \frac{3}{2} \\ 5 - \sqrt{3 - 2x} \geq 0 &\rightarrow -\sqrt{3 - 2x} \geq -5 \rightarrow (\sqrt{3 - 2x})^2 \leq (5)^2 \\ &\rightarrow 3 - 2x \leq 25 \rightarrow -2x \leq 22 \rightarrow x \geq -\frac{22}{2} \\ &\rightarrow x \geq -11 \rightarrow D = [-11, \frac{3}{2}] \end{aligned}$$

تمرین ۸۸.۰.۱. $y = \sqrt{\sqrt{4x-3}-2}$ ؟

پاسخ ۸۹.۰.۱.

$$\begin{aligned} 4x - 3 \geq 0 &\rightarrow x \geq \frac{3}{4} \\ \sqrt{4x-3}-2 \geq 0 &\rightarrow \sqrt{4x-3} \geq 2 \rightarrow 4x-3 \geq 4 \rightarrow x \geq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

و داریم $D = [\sqrt[n]{A}, +\infty)$

نکته ۹۰.۰.۱.

$$x^n < A \rightarrow -\sqrt[n]{A} < x < \sqrt[n]{A}$$

$$x^n > A \rightarrow \begin{cases} x > \sqrt[n]{A} \\ x < -\sqrt[n]{A} \end{cases}$$

$$A < x^n < B \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{A} < x < \sqrt[n]{B} \\ -\sqrt[n]{B} < x < -\sqrt[n]{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^n < A \rightarrow x < \sqrt[n]{A} \\ x^n > A \rightarrow x > \sqrt[n]{A} \\ A < x^n < B \rightarrow \sqrt[n]{A} < x < \sqrt[n]{B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| < A \rightarrow -A < x < A \\ |x| > A \rightarrow x > A, \quad x < -A \\ A < |x| < B \rightarrow A < x < B, \quad -B < x < -A \end{cases}$$

- اگر لگاریتم دارای مبنا باشد. $\log_g^f$

(۱) باید f و g را صفر قرار دهیم.

(۲) f و g را تعیین علامت کنید.

(۳) p را پیدا نکنید.

(۴) هر جا مثبت‌ها زیر هم شد دامنه است.

(۵) $g \neq 1$.

مثال ۹۱.۰.۱. $y = \log_{x-1}^{x-x^2}$ ؟

پاسخ ۹۲.۰.۱.

$$\begin{cases} 4 - x^2 = 0 & \rightarrow x = \pm 2 \\ 2x - 1 = 0 & \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لذا داریم $D = (\frac{1}{2}, 2) - \{1\}$.

$$2x - 1 \neq 1 \rightarrow 2x \neq 2 \rightarrow x \neq 1.$$

دامنه $y = \tan u$:

$$V = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} D = R - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \\ D = \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

دامنه $y = \cot u$:

$$U = k\pi$$

$$D = R - \{k\pi\}$$

$$D = \{x \mid x \neq k\pi\}$$

دامنه $\arcsin U$ و $\arccos U$:

$$-1 \leq U \leq 1.$$

مثال ۹۳.۰.۱. $y = \arcsin \frac{1-4x}{5}$ ؟

پاسخ ۹۴.۰.۱.

$$-1 \leq \frac{1-4x}{5} \leq 1 \rightarrow -5 \leq 1-4x \leq 5$$

$$-6 \leq -4x \leq 4 \rightarrow \frac{6}{4} \geq x \geq -1 \rightarrow D = [-1, \frac{3}{2}]$$

مثال ۹۵.۰.۱. $y = (x^2 - 1) \arccos \frac{2x-1}{x}$ ؟

پاسخ ۹۶.۰.۱.

$$-1 \leq \frac{2x-1}{x} \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x} \leq 1 \\ \frac{2x-1}{x} \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-1-x}{x} \leq 0 \\ \frac{2x-1+x}{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x} \leq 0 \\ \frac{3x-1}{x} \geq 0 \end{cases}$$

پس $D = [\frac{1}{3}, 1]$

۶.۰.۱ ترکیب توابع

دو تابع f و g را می‌توان ترکیب داد و توابع جدید $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورد.

تعریف ۹۷.۰.۱. فرض کنید f و g توابعی با دامنه‌های A و B باشند. در این صورت توابع $f+g$ ، $f-g$ ،

$\frac{f}{g}$ ، $f \cdot g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \rightarrow D_{f+g} = A \cap B$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \rightarrow D_{f-g} = A \cap B$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \rightarrow D_{fg} = A \cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\} = A \cap B - \{x \in B \mid g(x) = 0\}$$

مثال ۹۸.۰.۱. فرض کنید $f(x) = x^3 - 3x$ و $g(x) = x^3 + 4$ در این صورت اعمال $f \cdot g$ ، $f - g$ ، $f + g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.
پاسخ ۹۹.۰.۱.

$$D_f = D_g = R$$

$$(f + g)(x) = x^3 - 3x + x^3 + 4 = 2x^3 - 3x + 4 \quad D_{f+g} = R$$

$$(f - g)(x) = x^3 - 3x - (x^3 + 4) = -3x - 4 \quad D_{f-g} = R$$

$$(f \cdot g)(x) = (x^3 - 3x)(x^3 + 4) = x^6 - 3x^3 + 4x^3 - 12x \quad D_{f \cdot g} = R$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^3 + 4}, \quad g(x) \neq 0 \quad D_{\frac{f}{g}} = R - \emptyset = R$$

۷.۰.۱ تابع مرکب

تعریف ۱۰۰.۰.۱. فرض کنید f و g دو تابع باشند، تابع مرکب $f \circ g$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

دامنه $f \circ g$ مجموعه همه‌ی x هایی از دامنه g است، به طوری که $g(x)$ در دامنه f باشد یعنی

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال ۱۰۱.۰.۱. توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = x^2 + x$ تعریف شده‌اند. توابع مرکب

$f \circ g$ و $g \circ f$ را تعیین کنید؟

پاسخ ۱۰۲.۰.۱. چون $D_f = D_g = \mathbb{R}$ پس $f \circ g$ و $g \circ f$ قابل تعریف هستند لذا

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 2 = 2(x^2 + x) - 2 = 2x^2 + 2x - 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^2(x) + f(x) = (2x - 2)^2 + (2x - 2) = 4x^2 - 6x + 2$$

مثال ۱۰۳.۰.۱. اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$

(الف) $f \circ g$ (ب) $f \circ f$ (ج) $g \circ g$

پاسخ ۱۰۴.۰.۱. حل الف:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$$

$$D_f = [0, \infty) \quad D_g = (-\infty, 2]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{2-x} \in [0, \infty)\}$$

$$= \{x \in (-\infty, 2] \mid 2-x \geq 0\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid 2 \geq x\} = (-\infty, 2]$$

حل ب:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

حل ج:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2-x}) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$$

۸.۰.۱ معکوس توابع

اگر f یک به یک باشد آنگاه f معکوس پذیر است.

برای پیدا کردن معکوس f اول باید یک به یک بودن را بررسی کنید.

(۱) یک به یک بودن را بررسی کنید.

(۲) y را بنویسید.

(۳) y را طرفین وسطین کنید یا به توان برسانید و x را بر حسب y پیدا کنید.

۴ در آخر x و y را عوض کنید.

مثال ۱۰۵.۰.۱. معکوس تابع $f = \frac{2x-1}{3x+5}$ را بیابید.

پاسخ ۱۰۶.۰.۱.

$$f(x) = f(z) \rightarrow \frac{2x-1}{3x+5} = \frac{2z-1}{3z+5}$$

$$\rightarrow 6xz + 10x - 3x - 5 = 6xz - 3x + 10z - 5$$

$$\rightarrow 13x = 13z \rightarrow x = z$$

$$y = \frac{2x-1}{3x+5} \rightarrow 3xy + 5y = 2x - 1$$

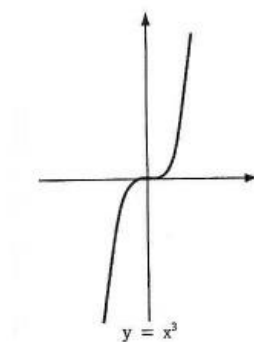
$$\rightarrow 3xy - 2x = -1 - 5y \rightarrow x(3y - 2) = -1 - 5y$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 - 5y}{3y - 2} \rightarrow f^{-1} = \frac{-1 - 5x}{3x - 2}$$

۹.۰.۱ رسم نمودار توابع ساده به کمک نقطه‌یابی

مثال ۱۰۷.۰.۱. به روش نقطه‌یابی تابع $y = x^3$ را رسم کنید.

پاسخ ۱۰۸.۰.۱.

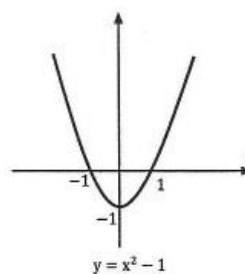


مثال ۱۰۹.۰.۱. $f(x) = x^2 - 1$ ؟

پاسخ ۱۱۰.۰.۱.

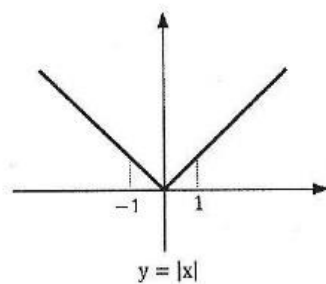
x	0	1	-1	2	-2
y	-1	0	0	3	3

$$D = \mathbb{R} , \quad R = [-1, +\infty)$$

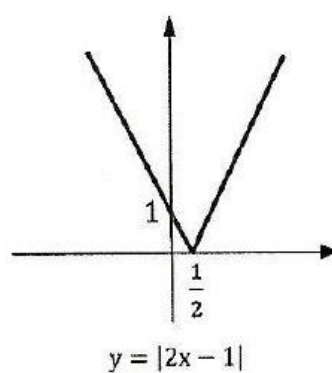


مثال ۱۱۱.۰.۱. $y = |x|$ ؟

پاسخ ۱۱۲.۰.۱.

مثال ۱۱۳.۰.۱. $y = |2x - 1|$

پاسخ ۱۱۴.۰.۱.

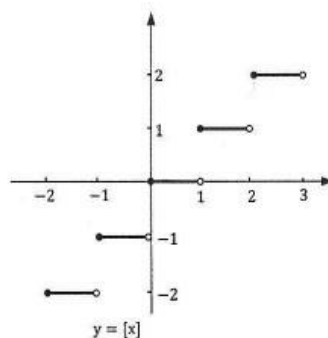


۱۰.۰.۱ جزء صحیح

مثال ۱۱۵.۰.۱. نمودار جزء صحیح تابع $f(x) = [x]$ را در فاصله $(-2, 2)$ رسم کنید.

پاسخ ۱۱۶.۰.۱.

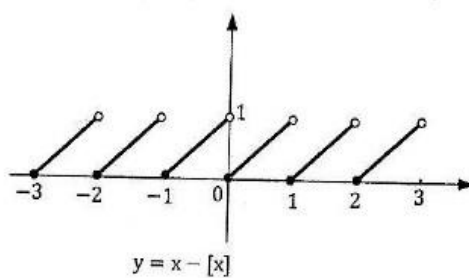
$$f(x) = [x] = \begin{cases} -2 & -2 \leq x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



مثال ۱۱۷.۰.۱. نمودار تابع $y = X - [x]$ (تابع اوی) را در فاصله $[-3, 3]$ رسم کنید.

پاسخ ۱۱۸.۰.۱.

$$\begin{aligned} -3 \leq x < -2 &\Rightarrow [x] = -3 \\ -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ 2 \leq x < 3 &\Rightarrow [x] = 2 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = x - [x] = \begin{cases} x+3 & -3 \leq x < -2 \\ x+2 & -2 \leq x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ x-2 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



فصل دوم

حد و پیوستگی

تعریف ۱۱۹.۰.۲. فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد. عددی مانند L را حد تابع f در نقطه $x = a$ می‌نامیم هرگاه، وقتی x به a نزدیک می‌شود $f(x)$ به قدر کافی به L نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و می‌خوانیم وقتی x به سمت a میل می‌کند آنگاه $f(x)$ به L میل می‌کند یا می‌نویسیم وقتی $x \rightarrow a$ آنگاه $f(x) \rightarrow L$ و می‌خوانیم وقتی x به a میل می‌کند آنگاه $f(x)$ به L می‌گراید.

نکته ۱۲۰.۰.۲. با توجه به تعریف حد تابع، برای وجود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ تابع f باید در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد.

مثال ۱۲۱.۰.۲. تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در نقطه $x = 1$ تعریف نشده است. اکنون حد این تابع را در نقطه $x = 1$ به دست می‌آوریم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

چون $x \neq 1$ پس $x - 1 \neq 0$ پس می‌توانیم عامل $x - 1$ در صورت و مخرج را با هم ساده کنیم لذا

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

مثال ۱۲۲.۰.۲. تابع $f(x) = |x - 1|$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$ را به دست آوریم.

بنابه تعریف تابع قدرمطلق داریم

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & x - 1 < 0 \end{cases}$$

و یا معادل آن یعنی

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

اگر بخواهیم با x های بزرگتر از عدد ۱ به $x = 1$ نزدیک شویم در این صورت $|x - 1| = x - 1$ پس $f(x)$ در این حالت به سمت صفر نزدیک می‌شود.

اگر بخواهیم با x های کوچکتر از عدد ۱ به $x = 1$ نزدیک شویم در این صورت $|x - 1| = -x + 1$ پس $f(x)$ در این حالت باز هم به سمت صفر نزدیک می‌شود پس در هر دو حالت داریم

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0$$

۱۱.۰.۲ مروری بر اتحادها

نکته ۱۲۳.۰.۲. (۱) اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$(۲) a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

- (۳) اتحاد مجموع مکعبات دو جمله $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
- (۴) اتحاد تفاضلات مکعبات دو جمله $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
- (۵) اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- (۶) اتحاد مربع تفاضل دو جمله $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (۷) اتحاد مزدوج $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- (۸) اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

۱۲.۰.۲ قضایای حد

در این قسمت تعدادی از قضایای مهم که برای به دست آوردن حد توابع مختلف به آن نیاز داریم را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۲۴.۰.۲. اگر $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x + \dots + c_nx^n$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد (که در آن $c_0, c_1, \dots, c_n$ اعداد حقیقی و n عدد صحیح مثبتی است) آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) = c_0 + c_1a + \dots + c_na^n$$

مثال ۱۲۵.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x - 2)$ را به دست آورید؟

پاسخ ۱۲۶.۰.۲. بنابر قضیه فوق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x - 2) = 3 \times 1^2 + 1 - 2 = 2$$

نتیجه ۱۲۷.۰.۲. اگر c عددی ثابت باشد با توجه به قضیه فوق داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

قضیه ۱۲۸.۰.۲. هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و c عددی ثابت باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$$

مثال ۱۲۹.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1}$ را به دست آورید.

پاسخ ۱۳۰.۰.۲. به نابه مثال قبل می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ اکنون با استفاده از قضیه فوق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \times 2 = 4$$

قضیه ۱۳۱.۰.۲. هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

به عبارت دیگر حد مجموع دو تابع برابر مجموع حدهای آنهاست مشروط بر اینکه حد آن توابع وجود داشته باشد.

مثال ۱۳۲.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x - 1} + 3x + 7)$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۱۳۳.۰.۲.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x - 1} + 3x + 7) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 7)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 7 = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} + 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 7$$

$$= 0 + 3 \times 1 + 7 = 10$$

نتیجه ۱۳۴.۰.۲. قضیه حد مجموع را می‌توان به هر تعداد متناهی تابع تعمیم داد. یعنی، اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2, \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$$

در این صورت

$$\lim(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

قضیه ۱۳۵.۰.۲. هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L.M$$

به عبارت دیگر حد حاصلضرب دو تابع برابر حاصلضرب حدهای آنهاست. مشروط بر اینکه حد آن توابع وجود داشته باشند.

مثال ۱۳۶.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)(x^3 + 1)$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۱۳۷.۰.۲.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)(x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 1) = 8 + 1 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)(x^3 + 1) = 3 \times 9 = 27$$

نتیجه ۱۳۸.۰.۲. قضیه حد حاصلضرب را می‌توان به هر تعداد متناهی تابع تعمیم داد یعنی اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2, \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$$

در این صورت

$$\lim(f_1(x).f_2(x)\dots f_n(x)) = L_1.L_2\dots L_n$$

نتیجه ۱۳۹.۰.۲. اگر در نتیجه فوق قرار دهیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad , \quad f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = f(x)$$

در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$$

مثال ۱۴۰.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)^3$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۱۴۱.۰.۲. بنابه نتیجه اخیر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)^3 = [\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)]^3 = 2^3 = 8$$

قضیه ۱۴۲.۰.۲. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آنگاه برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

در این رابطه اگر n زوج باشد L باید نامنفی باشد.

مثال ۱۴۳.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1}$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۱۴۴.۰.۲. می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ بنابراین با استفاده از قضیه داریم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$$

قضیه ۱۴۵.۰.۲. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq \circ$ آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

مثال ۱۴۶.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 1}{x^2 + 2}$ را به دست آورید.

پاسخ ۱۴۷.۰.۲. می‌دانیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - 1) = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 1}{x^2 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

مثال ۱۴۸.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۱۴۹.۰.۲. می‌دانیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = \circ$$

بنابراین نمی‌توان مستقیماً از قضیه فوق استفاده کرد. اکنون صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کنیم.

پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

قضیه ۱۵۰.۰.۲. حد تابع در صورت وجود، یکتاست. به عبارت دیگر اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و

$$L_1 = L_2 \text{ آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$$

قضیه ۱۵۱.۰.۲. هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ در این صورت $|\lim_{x \rightarrow a} f(x)| = |L|$.

قضیه ۱۵۲.۰.۲. قضیه فشردگی

فرض کنیم در یک همسایگی محذوف نقطه a داشته باشیم $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ در این صورت اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

آنگاه تابع f در a حد دارد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

مثال ۱۵۳.۰.۲. فرض کنیم بازای همه مقادیر x داشته باشیم

$$x^3 - 1 \leq f(x) \leq -x^3 + 1$$

اکنون بنا به قضیه فشردگی چون

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (-x^3 + 1) = 0$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

مثال ۱۵۴.۰.۲. مطلوبست محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

پاسخ ۱۵۵.۰.۲. با توجه به خواص جزء صحیح می‌دانیم:

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در x و با فرض $x > 0$ داریم:

$$1 - x \leq x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$$

اکنون بنا به قضیه فشردگی چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

لذا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

۱۳.۰.۲ حدود یک طرفه (حد راست و چپ)

تعریف ۱۵۶.۰.۲. فرض کنیم تابع f بر بازه (a, c) تعریف شده باشد. اگر وقتی x از سمت راست به a نزدیک شود ($x > a$) آنگاه $f(x)$ به L نزدیک می‌شود در این صورت L را حد راست f در نقطه $x = a$ می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

تعریف ۱۵۷.۰.۲. فرض کنیم تابع f بر بازه (a, c) تعریف شده باشد. اگر وقتی x از سمت چپ به a نزدیک شود ($x < a$) آنگاه $f(x)$ به L نزدیک می‌شود در این صورت L را حد چپ تابع f در نقطه $x = a$ می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

قضیه ۱۵۸.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ اگر و فقط اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

نتیجه ۱۵۹.۰.۲. با توجه به قضیه فوق داریم:

(الف) اگر حد چپ یا حد راست تابعی در یک نقطه وجود نداشته باشد تابع در آن نقطه حد ندارد.

(ب) اگر حد چپ و حد راست تابعی در یک نقطه موجود و برابر نباشد تابع در آن نقطه حد ندارد.

مثال ۱۶۰.۰.۲. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. حد چپ و حد راست تابع f را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

پاسخ ۱۶۱.۰.۲. برای به دست آوردن حد چپ تابع f در نقطه $x = 1$ ، $(\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x)))$ ، چون x با مقادیر

کوچک‌تر از عدد یک به سمت عدد یک میل می‌کند، لذا از ضابطه دوم تابع f استفاده می‌کنیم. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$$

برای به دست آوردن حد راست تابع f در نقطه $x = 1$ ، $(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x))$ ، چون x با مقادیر بزرگتر از عدد یک

به سمت عدد یک میل می‌کند، لذا از ضابطه اول تابع f استفاده می‌کنیم. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

چون حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ برابر نمی‌باشد لذا حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ موجود نمی‌باشد.

مثال ۱۶۲.۰.۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 2 \\ 2x + k & x < 2 \end{cases}$$

مقدار k را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه $x = 2$ دارای حد باشد.

پاسخ ۱۶۳.۰.۲. با توجه به قضیه (۱۵۸.۰.۲)، k را چنان باید تعیین کنیم که:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + k) = 4 + k$$

لذا برای وجود حد تابع f در نقطه $x = 2$ باید داشته باشیم:

$$4 + k = 3 \implies k = -1$$

۱۴.۰.۲ حدود نامتناهی و حد در بی نهایت

تعریف ۱۴.۰.۲. فرض کنید تابع f به بازه‌ای باز شامل نقطه a (احتمالا به جز نقطه a) تعریف شده باشد. اگر وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند، $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر شود در این صورت می‌گوییم تابع $f(x)$ وقتی به سمت عدد a میل می‌کند به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

تعریف ۱۴.۰.۲. فرض کنید تابع f به بازه‌ای باز شامل نقطه a (احتمالا به جز نقطه a) تعریف شده باشد. اگر وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند، $f(x)$ از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر شود در این صورت می‌گوییم تابع $f(x)$ وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند به منفی بی‌نهایت میل می‌کند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

نکته ۱۴.۰.۲. به یاد داشته باشید که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. روابط زیر برقرار می‌باشند.

(الف)

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

(ب)

$$a + \infty = +\infty + a = +\infty$$

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = a - \infty = -\infty$$

(پ) اگر c یک عدد حقیقی ثابت و کوچکتر از صفر باشد، داریم:

$$\begin{cases} c(+\infty) = (+\infty)c = -\infty \\ c(-\infty) = (-\infty)c = +\infty \end{cases}$$

(ت) اگر c یک عدد حقیقی ثابت و بزرگتر از صفر باشد، داریم:

$$\begin{cases} c(+\infty) = (+\infty)c = +\infty \\ c(-\infty) = (-\infty)c = -\infty \end{cases}$$

(ث) اگر c یک عدد حقیقی و مخالف صفر باشد، داریم:

$$\frac{c}{+\infty} = 0, \quad \frac{c}{-\infty} = 0$$

تعریف ۱۶۷.۰.۲. فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه $(c, +\infty)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر با L است اگر وقتی x از هر عدد مثبتی بزرگتر شود، آنگاه $f(x)$ به L نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

تعریف ۱۶۸.۰.۲. فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه $(-\infty, c)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر با L است اگر وقتی x از هر عدد منفی کوچکتر شود، آنگاه $f(x)$ به L نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

قضیه ۱۶۹.۰.۲. فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (یک عدد حقیقی یا یکی از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ می‌باشد). در این صورت:

(الف) اگر $L > 0$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

(ب) اگر $L > 0$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به سمت صفر میل کند آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(پ) اگر $L < 0$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(ت) اگر $L < 0$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

قضیه ۱۷۰.۰.۲. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

مثال ۱۷۱.۰.۲. فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد. در این صورت حدهای $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$ و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n}$ را به دست آورید.

پاسخ ۱۷۲.۰.۲. با توجه به قضیه فوق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

مثال ۱۷۳.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x+1}{x-1}$ را به دست آورید.

پاسخ ۱۷۴.۰.۲. می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1+} (2x+1) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0$ و مخرج نیز با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند. لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$$

مثال ۱۷۵.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x+1}{x-1}$ را به دست آورید.

پاسخ ۱۷۶.۰.۲. می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 1-} (2x+1) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1-} (x-1) = 0$ و مخرج نیز با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند. لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$$

مثال ۱۷۷.۰.۲. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2+1}$ را به دست آورید.

پاسخ ۱۷۸.۰.۲. بیشترین توان x در صورت x و بیشترین توان x در مخرج x^2 می‌باشد. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-\frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

نکته ۱۷۹.۰.۲. فرض کنید:

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_o}{b_o} & n = m \\ o & n < m \\ \pm\infty & n > m \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود در حالت آخر علامت ∞ به علامت a_o و b_o بستگی دارد.

۱۵.۰.۲ مفهوم پیوستگی

تعریف ۱۸۰.۰.۲. تابع f را در نقطه $x = a$ پیوسته می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) f در a تعریف شده باشد، یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد.

(۲) f در a حد داشته باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد.

(۳) حد تابع برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ برقرار باشد.

در صورت عدم برقراری هر یک از شرایط فوق، تابع f را در نقطه a ناپیوسته می‌نامیم.

مثال ۱۸۱.۰.۲. فرض کنیم $f(x) = c_o + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ و $a \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c_o + c_1a + \dots + c_na^n = f(a)$$

بنابراین f در نقطه $x = a$ پیوسته است. به عبارت دیگر یک چندجمله‌ای در هر نقطه $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال ۱۸۲.۰.۲. تابع f را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > o \\ 2x + 1 & x < o \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. در این صورت تابع f در نقطه $x = o$ پیوسته نمی‌باشد چون مقدار تابع در این نقطه تعریف

نشده است.

مثال ۱۸۳.۰.۲. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \\ -2x & x < 1 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. پیوستگی این تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

پاسخ ۱۸۴.۰.۲. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x) = -2$$

لذا چون $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نمی‌باشد. بنابراین تابع f در نقطه $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد.

تعریف ۱۸۵.۰.۲. (الف) تابع f در نقطه $x = a$ پیوستگی چپ دارد هرگاه، $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

(ب) تابع f در نقطه $x = a$ پیوستگی راست دارد هرگاه، $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

تعریف ۱۸۶.۰.۲. تابع f را در بازه باز (a, b) پیوسته می‌نامیم هرگاه f در همه نقاط این بازه پیوسته باشد.

اگر f حداقل در یک نقطه از بازه (a, b) پیوسته نباشد در این صورت f را روی بازه (a, b) ناپیوسته می‌نامیم.

تعریف ۱۸۷.۰.۲. تابع f را روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

(۱) f روی فاصله (a, b) پیوسته باشد.

(۲) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

مثال ۱۸۸.۰.۲. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 1 \\ -2x + 7 & x < 1 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. پیوستگی آنرا بر $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

پاسخ ۱۸۹.۰.۲. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(3x + 1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 7) = 5$$

$$f(1) = 4$$

لذا تابع f در نقطه $x = 1$ تنها دارای پیوستگی راست می‌باشد.

در سایر نقاط اعداد حقیقی چون ضابطه f به صورت چندجمله‌ای می‌باشد پس تابع f در این نقاط پیوسته می‌باشد.

۱۶.۰.۲ مثال‌های متعدد از حدها و قضایای حدی

$$\lim_{z \rightarrow -2} (z^2 + 8) \quad \text{مثال ۱۹۰.۰.۲ (۱)}$$

حل:

$$\lim_{z \rightarrow -2} (z^2 + 8) = \left(\lim_{z \rightarrow -2} z \right)^2 + 8 = -4 + 8 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{9x^2 - 1} \quad (2)$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{(3x - 1)(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{1}{(3x + 1)} = \frac{1}{3 \times \frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{\frac{\lambda r + 1}{r + 3}} \quad (۳)$$

حل:

$$\sqrt{\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\lambda r + 1}{r + 3}} = \sqrt{\frac{\lambda \times 1 + 1}{1 + 3}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} \quad (۴)$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{(3 + \sqrt{x})} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t} \quad (۵)$$

حل:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t} \times \frac{2 + \sqrt{4 - t}}{2 + \sqrt{4 - t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 - 4 + t}{t(2 + \sqrt{4 - t})} = \frac{1}{2 + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h + 1} - 1}{h} \quad (۶)$$

حل:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h + 1} - 1}{h} \times \frac{\sqrt{h + 1} + 1}{\sqrt{h + 1} + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 1 - 1}{h(\sqrt{h + 1} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$(۷) \text{ اگر } f(x) = x^2 + 5x - 3 \text{ نشان دهید که } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + 5(\lim_{x \rightarrow 2} x) - 3 = 2^2 + 10 - 3 = f(2)$$

(۸) فرض کنید که تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x \neq -3 \\ 4 & x = -3 \end{cases}$$

پیدا کنید $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ را، و نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3)$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow -3} x \right)^2 - 9 = (-3)^2 - 9 = 0, \quad f(x) = 4 \neq 0$$

۹) حد راست و چپ تابع زیر را به دست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} 3tt^2 & t < -2 \\ 0 & t = -2 \\ 11 - t^2 & -2 < t \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{t \rightarrow -2+} f(t) = 11 - (-2)^2 = 7$$

$$\lim_{t \rightarrow -2-} f(t) = 3 + (-2)^2 = 7$$

پس $\lim_{t \rightarrow -2} f(t)$ موجود می‌باشد چون

$$\lim_{t \rightarrow -2-} f(t) = \lim_{t \rightarrow -2+} f(t)$$

(۱۰)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ ax + b & -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & 2 \leq x \end{cases}$$

مفروض است. مطلوب است مقادیر a و b به طوری که $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود داشته باشد.

حل: (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 6) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) \implies -2 = 2a + b$$

(۲)

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax + b) \implies 4 = -2a + b$$

حال از (۱) و (۲) داریم:

$$2b = 2 \quad b = 1 \quad 2a = -2 - b \quad a = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{-t + 2}{(t - 2)^2} \quad (۱۱)$$

حل:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{-1}{t - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4x}{9 - x^2} \quad (۱۲)$$

حل:

$$\lim_{t \rightarrow -3^-} \frac{4x}{9 - x^2} = \frac{36}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - x}{3 - x} \quad (۱۳)$$

حل:

$$\lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{[x] - x}{3 - x} = \frac{2 - 3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (١٤)$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{0 - 1}{0 - 1} = +\infty$$

$$\text{حل: } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{2}} - 9}}{x - 4} \quad (١٥)$$

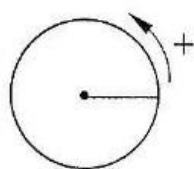
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{4-x} \sqrt{4+x}}{-\sqrt{4-x} \sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4}}{-0+} = -\infty$$

فصل سوم

روابط مثلثاتی

زاویه $۱۷.۰.۳$

زاویه اولین مفهوم در مثلثات است که به طور قرار دادن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت را جهت مثلثاتی در نظر می‌گیرند.



واحدهای مهم اندازه‌گیری زاویه عبارتند از:

(۱) درجه (۲) رادیان

تعریف ۱۹۱.۰.۳. اگر محیط دایره را به 360° قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی مقابل به هر قسمت را یک درجه می‌نامند.

تعریف ۱۹۲.۰.۳. اگر محیط دایره را به 2π ($\pi \simeq 3.14$) قسمت مساوی تقسیم کنیم با کمان‌هایی به اندازه شعاع دایره ایجاد کنیم زاویه مرکزی مقابل به هر قسمت را یک رادیان می‌نامند.

برای تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر از رابطه $\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ یا $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۹۳.۰.۳. اگر اندازه زاویه‌ای بر حسب درجه 45° باشد آنگاه اندازه این زاویه را بر حسب رادیان محاسبه کنید.

پاسخ ۱۹۴.۰.۳.

$$\frac{45}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{45\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

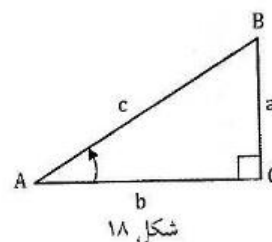
۱۸.۰.۳ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت در مثلث قائم‌الزاویه ABC به فرم زیر تعریف می‌شوند.

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

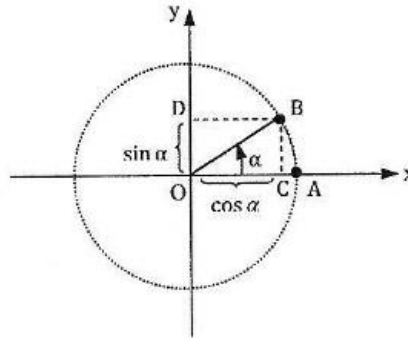


معکوس ضربی این نسبت‌های مثلثاتی به ترتیب با نام‌های کسکانت، سکانت و کتانژانت خوانده می‌شوند بنابراین

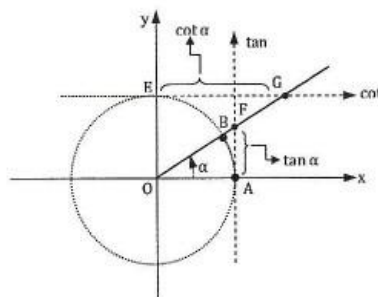
$$\csc A = \frac{1}{\sin A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

۱۹.۰.۳ نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

تعریف ۱۹۵.۰.۳. دایره‌ای به مرکز مختصات و به شعاع ۱ را که در آن جهت مثلثاتی، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تعیین شده باشد، دایره مثلثاتی می‌نامند.

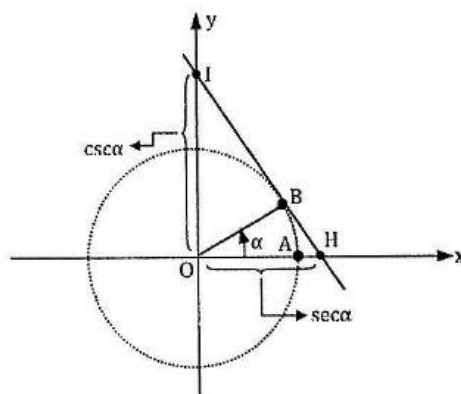


ضلع افقی این مستطیل واقع بر محور x ها، مقدار $\cos \alpha$ را نتیجه می‌دهد ($\cos \alpha = \overline{OC}$) و ضلع قائم مستطیل واقع بر محور y ها، مقدار $\sin \alpha$ را مشخص می‌کند ($\sin \alpha = \overline{OD}$)
 - برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ می‌توان از روابط $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ استفاده نمود.

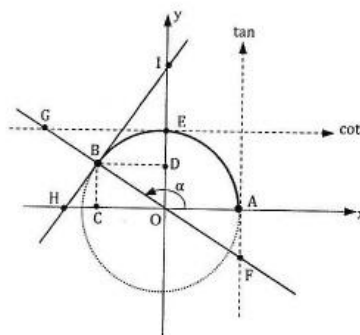


- و برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی $\sec \alpha$ و $\csc \alpha$ می‌توان از روابط $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ و $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ استفاده نمود یا اینکه خط مماس بر دایره را در نقطه B ترسیم نمود که این خط محورهای مختصات را در نقاطی مانند H و I قطع می‌کند در این صورت با توجه به شکل زیر مقادیر زیر را خواهیم داشت:

$$\sec \alpha = \overline{OH} \quad \csc \alpha = \overline{OI}$$



حال اگر انتهای کمان α در ربع دوم واقع باشد شکل زیر را خواهیم داشت:



و بنابراین نسبت‌های مثلثاتی زاویه α عبارتند از:

$$\sin \alpha = \overline{OD} > 0 \quad \cos \alpha = \overline{OC} < 0$$

$$\tan \alpha = \overline{AF} < 0 \quad \cot \alpha = \overline{EG} < 0$$

$$\sec \alpha = \overline{OH} < 0 \quad \csc \alpha = \overline{OI} > 0$$

با ادامه این روند در سایر ربع‌ها، جدول علامات نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های چهارگانه به صورت زیر حاصل می‌شود.

نسبت \ ربع	۱	۲	۳	۴
$\sin \alpha$ و $\csc \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$ و $\sec \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$ و $\cot \alpha$	+	-	+	-

۲۰.۰.۳ اتحادهای مثلثاتی

با استفاده از قضیه فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1 \quad (۱.۳)$$

با تقسیم طرفین اتحاد (۱.۳) بر $\cos^2 A$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} \Rightarrow 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \quad (۲.۳)$$

۲۱.۰.۳ جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	-1

۲۲.۰.۳ اتحادهای سینوس مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (۳.۳)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (۴.۳)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (۵.۳)$$

مثال ۱۹۶.۰.۳. مقدار $\sin ۷۵^\circ$ و $\sin ۴۲^\circ$ را تعیین کنید.

پاسخ ۱۹۷.۰.۳.

$$\sin ۷۵^\circ = \sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

و

$$\sin ۲۴^\circ = \sin ۲(۱۲^\circ) = ۲ \sin ۱۲^\circ \cos ۱۲^\circ = ۲\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۳.۰.۳ اتحادهای کسینوس مجموع و تفاضل زوایا

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (۶.۳)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (۷.۳)$$

$$\cos(۲\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = ۱ - ۲ \sin^2 \alpha = ۲ \cos^2 \alpha - ۱ \quad (۸.۳)$$

مثال ۱۹۸.۰.۳. مقدار $\cos ۱۵^\circ$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۱۹۹.۰.۳.

$$\cos ۱۵^\circ = \cos(۶^\circ - ۴۵^\circ) = \cos ۶^\circ \cos ۴۵^\circ + \sin ۶^\circ \sin ۴۵^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

۲۴.۰.۳ اتحادهای تانژانت مجموع و تفاضل زوایا

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (۹.۳)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (۱۰.۳)$$

$$\tan(n\alpha) = \frac{n \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (۱۱.۳)$$

مثال ۲۰.۰.۳. مقادیر $\tan ۷۵^\circ$ و $\tan ۱۵^\circ$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۲۰.۱.۰.۳.

$$\tan ۷۵^\circ = \tan(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \frac{\tan ۴۵^\circ + \tan ۳۰^\circ}{1 - \tan ۴۵^\circ \tan ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

و

$$\tan ۱۵^\circ = \tan(۴۵^\circ - ۳۰^\circ) = \frac{\tan ۴۵^\circ - \tan ۳۰^\circ}{1 - \tan ۴۵^\circ \tan ۳۰^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

۲۵.۰.۳ اتحادهای مجموع، تفاضل و ضرب توابع مثلثاتی

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (۱۲.۳)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (۱۳.۳)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (۱۴.۳)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (۱۵.۳)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \quad (۱۶.۳)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \quad (۱۷.۳)$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)] \quad (۱۸.۳)$$

تعریف ۲۰۲.۰.۳. هر یک از نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس توابعی با دامنه $\mathbb{R}$ و برد $[-۱, ۱]$ می‌باشند، همچنین نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و سکانت با دامنه $\mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{۲} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ و نسبت‌های مثلثاتی کتانژانت و

کسکانت توابعی با دامنه $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ می‌باشند. برد توابع تانژانت و کتانژانت $\mathbb{R}$ و برد توابع سکانت و کسکانت برابر $\mathbb{R} - (-1, 1)$ است.

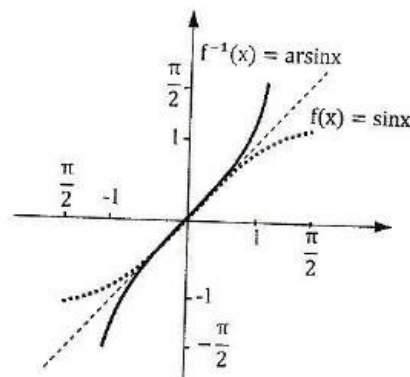
۲۶.۰.۳ توابع معکوس مثلثاتی

تابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ در کل دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی در زیر فاصله $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک‌به‌یک است پس می‌توان در این فاصله تابع معکوس آن را به دست آورد که آرک سینوس $\arcsin a$ خوانده می‌شود.

$$\begin{cases} f : I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \\ f(x) = \sin x \end{cases}$$

و معکوس آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ f^{-1}(x) = \arcsin x \end{cases}$$



با انتخاب بازه‌های مشابه در مورد سایر توابع جدول زیر را خواهیم داشت:

تابع مثلثاتی	تابع معکوس مثلثاتی	حدود تغییرات
$y = \sin x$	$\arcsin y = x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $-1 \leq y \leq 1$
$y = \cos x$	$\arccos y = x$	$0 \leq x \leq \pi$ و $-1 \leq y \leq 1$
$y = \tan x$	$\arctan y = x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ و $-\infty < y < +\infty$
$y = \cot x$	$\operatorname{arccot} y = x$	$0 < x < \pi$ و $-\infty < y < +\infty$
$y = \sec x$	$\operatorname{arcsec} y = x$	$x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ و $y \in \mathbb{R} - (-1, 1)$
$y = \csc x$	$\operatorname{arccsc} y = x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ و $y \in \mathbb{R} - (-1, 1)$

۲۷.۰.۳ معادلات مثلثاتی

یک معادله مثلثاتی، معادله‌ای شامل زاویه مجهول x و نسبت‌هایی از این زاویه می‌باشد و از اینکه توابع مثلثاتی تناوبی هستند، معمولاً معادلات مثلثاتی بی‌نهایت جواب دارند که به فرم زیر تعیین می‌شوند.

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha & \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۲۰۳.۰.۳. معادله زیر را حل کنید

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

پاسخ ۲۰۴.۰.۳

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۲۰۵.۰.۳. معادله زیر را حل کنید.

$$\tan x = 3 \cot x$$

پاسخ ۲۰۶.۰.۳

$$\tan x = \frac{3}{\tan x} \Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan = \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} = \tan \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

تمرین ۲۰۷.۰.۳. معادله‌های زیر را حل کنید.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \quad (2) \qquad \sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \quad (1)$$

۲۸.۰.۳ مشتق توابع مثلثاتی

در این بخش به بیان روابط مثلثاتی و مشتق آن‌ها و بیان و اثبات قضایای مهم می‌پردازیم.

لم ٢٠٨.٠.٣ . مشتق تابع

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

اثبات.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

□

$$\sin x \rightarrow \cos x \quad (١٩.٣)$$

$$\cos x \rightarrow -\sin x \quad (٢٠.٣)$$

$$\tan x \rightarrow 1 + \tan^2 x \quad (٢١.٣)$$

$$\cot x \rightarrow -(1 + \cot^2 x) \quad (٢٢.٣)$$

$$\sin x \rightarrow x' \cos x \quad (۲۳.۳)$$

$$\cos x \rightarrow -x' \sin x \quad (۲۴.۳)$$

$$\tan x \rightarrow x' (1 + \tan^2 x) \quad (۲۵.۳)$$

$$\cot x \rightarrow -x' (1 + \cot^2 x) \quad (۲۶.۳)$$

مثال ۲۰۹.۰.۳. مشتق تابع زیر را به دست آورید.

$$\sin 3x^2 \times \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

پاسخ ۲۱۰.۰.۳.

$$6x \cos 3x^2 \cot\left(\frac{1}{x}\right) + x \frac{-1}{x^2} \left(1 + \cot^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sin(3x^2)$$

$$\sin^m x \rightarrow (m \sin^{m-1} x)(x' \cos x) \quad (۲۷.۳)$$

$$\cos^m x \rightarrow (m \cos^{m-1} x)(-x' \sin x) \quad (۲۸.۳)$$

$$\tan^m x \rightarrow (m \tan^{m-1} x)(x'(\mathbf{1} + \tan^r x)) \quad (٢٩.٣)$$

$$\cot^m x \rightarrow (m \cot^{m-1} x)(-x'(\mathbf{1} + \cot^r x)) \quad (٣٠.٣)$$

مثال ٣.٠.٢١١. (١)

$$y = \sin x \times \cos x \rightarrow y' = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

(٢

$$y = \frac{\tan x + \mathbf{1}}{\cot x - \mathbf{1}} \rightarrow y' = \frac{(\mathbf{1} + \tan^r x)(\cot x - \mathbf{1}) - (\mathbf{1} + \cot^r x)(\tan x + \mathbf{1})}{(\cot x - \mathbf{1})^r}$$

(٣

$$y = \sin \left(\sqrt[r]{\frac{x^r}{x - \mathbf{1}}} \right) \rightarrow y' = \frac{\mathbf{1} \times \left(\frac{r x (x - \mathbf{1}) - \mathbf{1} x^r}{(x - \mathbf{1})^r} \right)}{\sqrt[r]{\left(\frac{x^r}{x - \mathbf{1}} \right)^r}} \cos \left(\sqrt[r]{\frac{x^r}{x - \mathbf{1}}} \right)$$

(٤

$$y = \tan \left(\frac{\mathbf{1}}{x^r - \sqrt{x}} \right) \rightarrow y' = \frac{-\left(r x - \frac{\mathbf{1}}{r \sqrt{x}} \right) \times \mathbf{1}}{(x^r - \sqrt{x})^r} (\mathbf{1} + \tan^r \left(\frac{\mathbf{1}}{x^r - \sqrt{x}} \right))$$

۲۹.۰.۳ توابع هذلولی (هیپربولیک) و مشتق آنها

تعریف ۲۱۲.۰.۳. تابع سینوس هیپربولیک با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

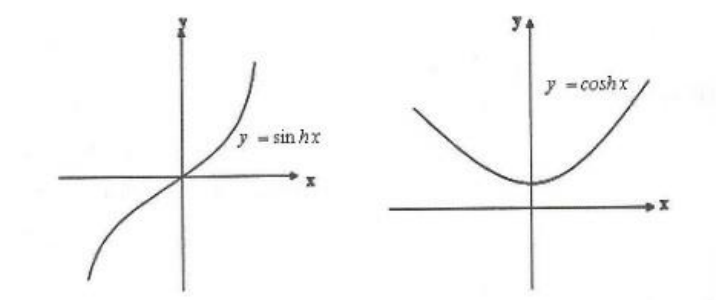
و همچنین دامنه سینوس هیپربولیک $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تعریف ۲۱۳.۰.۳. تابع کسینوس هیپربولیک با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

و همچنین دامنه کسینوس هیپربولیک $\mathbb{R}$ می‌باشد.

در شکل زیر توابع $\sin hx$ و $\cos hx$ رسم شده است.



تعریف ۲۱۴.۰.۳. تابع تانژانت هیپربولیک با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\tan hx = \frac{\sin hx}{\cos hx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

تعریف ۲۱۵.۰.۳. تابع کتانژانت هیپربولیک با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\cot hx = \frac{\cos hx}{\sin hx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

نکته ۲۱۶.۰.۳. به ازای هر x داریم $e^x > 0$ بنابراین $e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$ پس همیشه

$$\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

تعریف ۲۱۷.۰.۳. توابع $\sec hx$ و $\csc hx$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sec hx = \frac{1}{\cos hx}, \quad \csc hx = \frac{1}{\sin hx}$$

مثال ۲۱۸.۰.۳. نشان دهید.

$$\cos^2 hx - \sin^2 hx = 1$$

پاسخ ۲۱۹.۰.۳.

$$\begin{aligned} \cos^2 hx - \sin^2 hx &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1 \end{aligned}$$

نکته ۲۲۰.۰.۳. برخی از روابط مشتق را در جدول زیر به صورت واضح بیان می‌نماییم، که در آن U تابعی از

X و مشتق‌پذیر است.

ردیف	تابع	مشتق تابع
۱	$y = c$ (c عددی است ثابت)	$y' = 0$
۲	$y = ku^n$	$y' = nku'u^{n-1}$
۳	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
۴	$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$
۵	$y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$
۶	$y = \cot u$	$y' = -u'(1 + \cot^2 u)$
۷	$y = \text{Arcsin } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۸	$y = \text{Arccos } u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
۹	$y = \text{Arctan } u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
۱۰	$y = \text{Arccot } u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
۱۱	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
۱۲	$y = e^u$	$y' = u'e^u$
۱۳	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
۱۴	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
۱۵	$y = \sinh u$	$y' = u' \cosh u$
۱۶	$y = \cosh u$	$y' = u' \sinh u$
۱۷	$y = \tanh u$	$y' = u' \sec^2 u$
۱۸	$y = \coth u$	$y' = -u' \csc^2 u$

فصل چهارم

مشتق

۳۰.۰.۴ تعریف مشتق

تعریف ۲۲۱.۰.۴. اگر تابع f در نقطه a تعریف شده باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وجود داشته باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را، $f'(a)$ نمایش می‌دهیم لذا $f'(a)$ یعنی مشتق تابع f در نقطه a .

مثال ۲۲۲.۰.۴. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = 3x^2$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.

پاسخ ۲۲۳.۰.۴. با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3(x+1) = 6 \end{aligned}$$

تعریف ۲۲۴.۰.۴. شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه a ، که آن را با $m(a)$ نشان می‌دهیم برابر است با

$$f'(a)$$

نکته ۲۲۵.۰.۴. معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول a که روی نمودار تابع قرارداد عبارتست از:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

مثال ۲۲۶.۰.۴. معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{x}{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ از آن بنویسید.
پاسخ ۲۲۷.۰.۴. شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $(2, 2)$ برابر است با:

$$m(2) = f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{x-1} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-x+2}{x-1}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = -1$$

لذا معادله خط مماس در نقطه $(2, 2)$ عبارت است از:

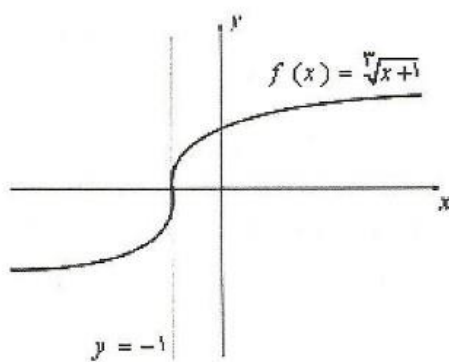
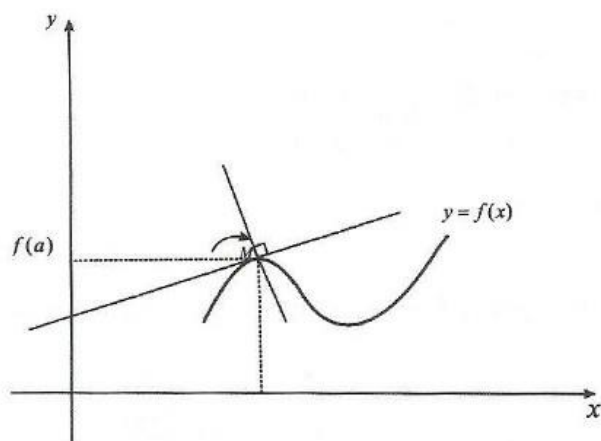
$$y - 2 = f'(2)(x - 2) \implies y - 2 = -(x - 2) \implies y = -x + 4$$

تعریف ۲۲۸.۰.۴. خط قائم بر منحنی در هر نقطه از نمودار یک تابع، خطی است عمود بر خط مماس بر تابع در آن نقطه. در شکل زیر خط قائم بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه M رسم شده است.
مثال ۲۲۹.۰.۴. تابع $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطه $x = -1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. زیرا:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty$$

در این حالت خط مماس بر منحنی در نقطه $x = -1$ موازی محور y ها می‌باشد.

قضیه ۲۳۰.۰.۴. اگر $f(x) = c$ که در آن c مقدار ثابتی است. در این صورت $f'(x) = 0$.



اثبات.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

□

قضیه ۲۳۱.۰.۴. اگر $f(x) = ax + b$ ، که در آن a و b مقدار ثابتی می‌باشند. در این صورت $f'(x) = a$.

اثبات.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$$

□

قضیه ۲۳۲.۰.۴. هرگاه n عدد صحیح مثبتی باشد و $f(x) = x^n$ در این صورت

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

قضیه ۲۳۳.۰.۴. اگر f و g توابعی مشتق پذیر باشند در این صورت تابع $f+g$ نیز مشتق پذیر است و داریم:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

قضیه ۲۳۴.۰.۴. اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و داریم:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

۳۱.۰.۴ تعریف مشتق یک طرفه

تعریف ۲۳۵.۰.۴. فرض کنیم تابع f در بازه (a, b) تعریف شده باشد. در این صورت مشتق راست تابع f درنقطه a را با $f'_+(a)$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به طور مشابه فرض کنیم تابع f در بازه (c, a) تعریف شده باشد. در این صورت مشتق چپ تابع f در نقطه a را با نماد $f'_-(a)$ نشان داده و آن را به صورت

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف می‌کنیم. مشروط بر اینکه این حدها وجود داشته باشند، مشتق‌های راست و چپ را مشتق‌های یک‌طرفه می‌نامیم.

۳۲.۰.۴ مشتق ترکیب توابع و مشتق ضمنی

قضیه ۲۳۶.۰.۴. (قاعده زنجیره‌ای). اگر y تابعی از u باشد که با $y = f(u)$ تعریف شده باشد و $\frac{dy}{du}$ موجود باشد، همچنین u نیز تابعی از x باشد که با $u = g(x)$ تعریف شده باشد و $\frac{du}{dx}$ موجود باشد. در این صورت y تابعی از x می‌باشد و $\frac{dy}{dx}$ موجود است و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

نکته ۲۳۷.۰.۴. اگر از نماد تابع مرکب استفاده کنیم، قاعده زنجیره‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = [f(gx)]' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

مثال ۲۳۸.۰.۴. اگر $f(x) = \frac{1}{4x^3 - x + 1}$ و $f'(x)$ را به کمک قاعده زنجیره‌ای بیابید.

پاسخ ۲۳۹.۰.۴. می‌نویسیم $f(x) = (4x^3 - x + 1)^{-1}$. در این صورت با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = -1(4x^3 - x + 1)^{-2}(4x^3 - x + 1)' = -(4x^3 - x + 1)^{-2}(12x^2 - 1) = \frac{-12x^2 + 1}{(4x^3 - x + 1)^2}$$

۳۳.۰.۴ مشتق توابع لگاریتمی و نمایی

قضیه ۲۴۰.۰.۴. اگر $f(x) = a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است، در این صورت:

$$f'(x) = a^x \ln a$$

قضیه ۲۴۱.۰.۴. اگر $f(x) = \log_a x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است، در این صورت:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

نتیجه ۲۴۲.۰.۴. اگر در قضیه فوق قرار دهیم $a = e$ (عدد نپر باشد) در این صورت داریم:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

با استفاده از قضایای فوق و قاعده زنجیره‌ای، قضایای زیر نتیجه می‌شوند.

قضیه ۲۴۳.۰.۴. اگر u تابعی از متغیر x باشد و $f(x) = a^u$ ، در این صورت:

$$f'(x) = u' a^u \ln a$$

قضیه ۲۴۴.۰.۴. اگر u تابعی از متغیر x باشد و $f(u) = \log_a u$ ، در این صورت:

$$f'(u) = \frac{u'}{u} \log_a e$$

نتیجه ۲۴۵.۰.۴. اگر در قضایای قبل قرار دهیم $a = e$ در این صورت داریم:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (*)$$

$$(e^u)' = u' e^u \quad (۲)$$

مثال ۲۴۶.۰.۴. مشتق تابع $f(x) = e^{x^2-3x}$ را محاسبه نمایید.

پاسخ ۲۴۷.۰.۴. بنابر نتیجه قبل داریم:

$$f'(x) = (x^2 - 3x)' e^{x^2-3x} = (2x - 3)e^{x^2-3x}$$

مثال ۲۴۸.۰.۴. مشتق تابع $f(x) = x \ln(x^2 - 1)$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۲۴۹.۰.۴.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \ln(x^2 - 1) + x(\ln(x^2 - 1))' = \ln(x^2 - 1) + x \frac{2x}{x^2 - 1} \\ &= \ln(x^2 - 1) + \frac{2x^2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

۳۴.۰.۴ مشتقات مرتبه بالاتر

تعریف ۲۵۰.۰.۴. فرض کنیم $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت $f'(x)$ را مشت اول $f(x)$ می‌نامیم.

اگر $f'(x)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن را با $f''(x)$ یا $f^{(2)}(x)$ نشان می‌دهیم و آن را مشتق مرتبه دوم $f(x)$

می‌نامیم. به همین ترتیب مشتق‌های سوم و چهارم... و n ام تابع $f(x)$ را (در صورت وجود) به ترتیب با

$f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$ و ... و $f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم.

نکته ۲۵۱.۰.۴. مشتق n ام تابع f را می‌توان به طریقه بازگشتی زیر نیز تعریف کرد.

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

۳۵.۰.۴ دیفرانسیل

تعریف ۲۵۲.۰.۴. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در فاصله (a, b) تعریف شده باشند: (۱) اگر x و $x + h$ دو مقدار از متغیر x در فاصله (a, b) باشند تفاضل $(x + h) - x$ که عددی مثبت یا منفی می‌باشد را نمو متغیر x می‌گوئیم و آن را با Δx نشان می‌دهیم.

$$\Delta x = (x + h) - x = h$$

(۲) تفاضل مقادیر تابع را که به ازای x و $x + h$ به دست می‌آید را نمو تابع می‌گوئیم و آن را با Δy نشان می‌دهیم.
بنابراین

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

تعریف ۲۵۳.۰.۴. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد. دیفرانسیل y را با نماد dy نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

که در آن Δx نمو دلخواهی از x است.

نکته ۲۵۴.۰.۴. اگر $y = f(x) = x$ باشد در این صورت $f'(x) = 1$. لذا با توجه به تعریف دیفرانسیل داریم:

$$dy = dx = \Delta x$$

مثال ۲۵۵.۰.۴. دیفرانسیل تابع $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$ را به دست آورید.

پاسخ ۲۵۶.۰.۴.

$$df = f'(x)dx \rightarrow df = (9x^2 - 2)dx$$

شبيه به فرمول‌های مشتق برای به دست آوردن دیفرانسیل نیز فرمول‌های مشابهی موجود می‌باشد.

قضیه ۲۵۷.۰.۴. اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند در این صورت:

$$d(c) = 0, \quad c \in R$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

$$d(cf) = cdf$$

$$d(f+g) = df + dg$$

$$d(fg) = f dg + g df$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

$$d(f^n) = nf^{n-1}df$$

۳۶.۰.۴ مشتق رادیکال

$$y = \sqrt[n]{U^m} \rightarrow y' = \frac{mU'}{n\sqrt[n]{U^{n-m}}}$$

(۱) توان می‌رود به صورت

(۲) هر چه باقیماند از آن مشتق بگیرید.

(۳) فرجه می‌رود به مخرج

(۴) رادیکال عینا در مخرج نوشته شود و از توان آن کم می‌شود.

مثال ۴.۰.۲۵۸. (۱)

$$y = \sqrt[5]{(\Delta h^2)^3} \rightarrow y' = \frac{1 \times 1^{\circ} h}{5 \sqrt[5]{(\Delta h^2)^6}}$$

(۲)

$$y = \sqrt[5]{(4x^2 - x + 1)^3} \rightarrow y' = \frac{3(8x - 1)}{5 \sqrt[5]{(4x^2 - x + 1)^2}}$$

(۳)

$$y = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow y' = \frac{3 \times 1}{5 \sqrt[5]{x^2}}$$

(۴)

$$y = \sqrt[5]{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \rightarrow y' = \frac{1 \times \{2x(x^2 + 1) + 3x^2(x^2 - 1)\}}{5 \sqrt[5]{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^4}}$$

اگر مخرج کسری A باشد یعنی عدد باشد موقع مشتق گیری فقط از صورت مشتق می گیریم.

$$\frac{f}{A} = \rightarrow \frac{f'}{A}$$

مثال ۴.۰.۲۵۹.

$$\frac{\Delta x^2 - x}{9} \rightarrow \frac{1^{\circ} x - 1}{9}$$

$$\frac{9}{\Delta x^2 - x} \rightarrow \frac{0 - (1^{\circ} x - 1)9}{(\Delta x^2 - x)^2}$$

اگر عدد A به کل تابع ضرب شود موقع مشتق گیری فقط از تابع مشتق بگیریم، عدد سر جایش بماند.

$$Af \rightarrow Af'$$

مثال ۲۶۰.۰.۴.

$$\frac{7}{5}(4x^2 - \sqrt{x}) \rightarrow \frac{7}{5}(8x - \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

مثال ۲۶۱.۰.۴. اگر $g = \sqrt{3x-1}$ باشد مشتق $g(\cos x)$ چیست؟

پاسخ ۲۶۲.۰.۴.

$$g = \sqrt{3x-1} \rightarrow g' = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

$$(g(\cos x))' = -\sin x \times \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

۳۷.۰.۴ مشتق گیری ضمنی

اگر رابطه بین x و y به وسیله معادله $f(x, y) = 0$ داده شده باشد برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ از دستور زیر استفاده می کنیم.

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

که در آن f'_x مشتق f نسبت به x و f'_y مشتق f نسبت به y است.

مثال ۲۶۳.۰.۴. اگر $x^4 + y^4 = (x-y)^2 + (x+y)^2$ انگاه $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

پاسخ ۲۶۴.۰.۴.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2(x+y) - 2(x-y) - 4x^3}{2(x+y) + 2(x-y) - 4x^3} = -\frac{4y - 4x^3}{4x - 4y^3} = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

مثال ۲۶۵.۰.۴. مشتق ضمنی تابع $1 = x^2 - y^3 - 4x^3y^2$ را به دست آورید.

مثال ۲۶۶.۰.۴.

$$y' = \frac{2x - 0 - 12x^2y^2}{0 - 3y^2 - 8x^3y^1}$$

رابطه مشتق در نقطه a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۲۶۷.۰.۴. مشتق $f(x) = \frac{3x-5}{4}$ را در $x=2$ بیابید.

پاسخ ۲۶۸.۰.۴. a را مشخص کنید.

(۲) $f(a)$ را پیدا کنید.

(۳) در رابطه فوق جایگزاری کنید.

$$a = 2 \quad f(2) = \frac{-7}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{3-5x}{4} - \frac{-7}{4}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-5x+7}{4(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x+10}{4(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(x-2)}{4(x-2)} = \frac{-5}{4}$$

مثال ۲۶۹.۰.۴. مشتق $f = 3x^2 + 4x - 1$ را در $x = -2$ بیابید.

پاسخ ۲۷۰.۰.۴.

$$a = -2 \quad f(-2) = 12 - 8 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x - 1 - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(3x-2)}{(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x-2}{1} = -6 - 2 = -8$$

$$\textcircled{1} f(x) = e^{rx} \sin x \rightarrow f'(x) = (e^{rx} \sin x)' = r e^{rx} \sin x + \cos x e^{rx}$$

$$\textcircled{2} g(x) = \log_p (x - x e^{rx}) \rightarrow (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$g'(x) = (\log_p (x - x e^{rx}))' = \frac{1 - (e^{rx} + r x e^{rx})}{(x - x e^{rx}) \ln p}$$

$$\textcircled{3} (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h(x) = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$$

$$h'(x) = \left(\frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x} \right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} = -1$$

$$\textcircled{4} k(x) = r^{\partial x} x^r \rightarrow (a^u)' = u' a^u \ln a$$

$$k'(x) = (r^{\partial x} x^r)' = \partial r^{\partial x} \ln r x^r + r x^r \ln r x^r$$

$$\textcircled{5} T(x) = \csc(r x^r)$$

$$\begin{cases} (\csc(x))' = -\csc(x) \cdot \cot(x) \\ (\csc(u))' = u' (-\csc(u) \cdot \cot(u)) \end{cases}$$

$$T'(x) = r x^{r-1} \ln r (-\csc(r x^r) \cdot \cot(r x^r))$$

$$\textcircled{1} f(x) = e^{rx^r} \cdot \sin^{-1} x$$

$$f'(x) = (e^{rx^r} \cdot \sin^{-1} x)' = 1 x e^{rx^r} \cdot \sin^{-1} x + e^{rx^r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\textcircled{2} g(x) = \ln(\sqrt{x} - x e^{rx})$$

$$\ln u = \frac{u'}{u}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - (e^{rx} + r x e^{rx})}{(\sqrt{x} - x e^{rx})}$$

$$\textcircled{3} h(x) = \frac{\cos x}{\sin^{-1} x} = \frac{-\sin x \times \sin^{-1} x - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cos x}{(\sin^{-1} x)^2} = \frac{-1 + \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sin^{-1} x)^2}$$

$$\textcircled{4} k(x) = r^{\sqrt{x}} x^r$$

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} r^{\sqrt{x}} \ln r x^r + r x^r \ln r x^r$$

$$\textcircled{5} T(x) = \sec(\sqrt{x}) \Rightarrow T'(x) = \sec(\sqrt{x})' = \sec(\sqrt{x})' (\sec(\sqrt{x}) \times \tan(\sqrt{x}))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \quad \left(\sec(\sqrt{x}) \neq \tan(\sqrt{x}) \right)$$

④ قضیه میانه: هرگاه f تابع پیوسته در بازه $[a, b]$ و مشتق پذیر در (a, b) باشد، آنگاه

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نقطه c موجود است که $c \in (a, b)$

1 حل: $f(x) = \pi/4 + \sin x = x \rightarrow f(x) = \pi/4 + \sin x - x = 0$

$$f'(x) = \cos x - 1$$

$$\cos x - 1 = \frac{-\pi/4 - (1)}{\pi - \pi/4} \Rightarrow \cos x - 1 = \frac{-\pi/4 - 1}{\pi/4}$$

$$\cos x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

2 حل: $x^3 + x - 1 = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 3x^2 + 1 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 1 = \frac{1 - (-1)}{1} = 2 \Rightarrow 3x^2 + 1 = 2 \Rightarrow 3x^2 = 1$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \in (0, 1)$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\text{در نقطه } x=2 \text{ بررسی کنید.} \quad \begin{cases} x^3 + 2 & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

⑤ مشتق پذیری تابع

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 + 2 = f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 + 2 = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 1 = 5$$

از چپ و راست به مشتق می‌رسد.

$$f'_+(2) = 2x = 4$$

و مشتق دارد.

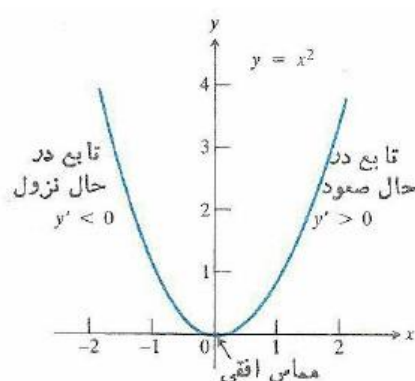
$$f'_-(2) = 2x = 4$$

فصل پنجم

کاربرد مشتق

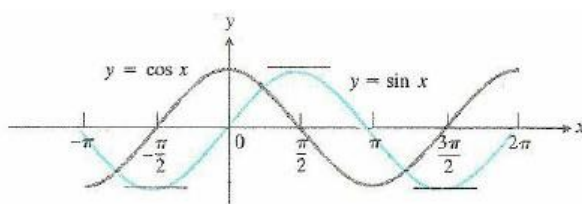
۳۸.۰.۵ رسم خم با استفاده از مشتق اول

وقتی بدانیم که تابعی در هر نقطه از بازه‌ای مشتق دارد، می‌دانیم که تابع در سراسر آن بازه پیوسته است، و نمودارش در آن بازه قطع‌شدگی ندارد. مثلاً نمودارهای توابع مشتق‌پذیر $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، همانند نمودارهای چند-جمله‌ایها، هر چند ادامه بیابند قطع نمی‌شوند. نمودارهای $y = \tan x$ و $y = \frac{1}{x^2}$ صرفاً در نقاطی که توابع مربوط تعریف نمی‌شوند قطع می‌شوند. بر هر بازه‌ای که این نقاط را شامل نباشد، توابع مزبور مشتق‌پذیرند، و بنابراین پیوسته‌اند و نمودارهایشان قطع‌شدگی ندارند.



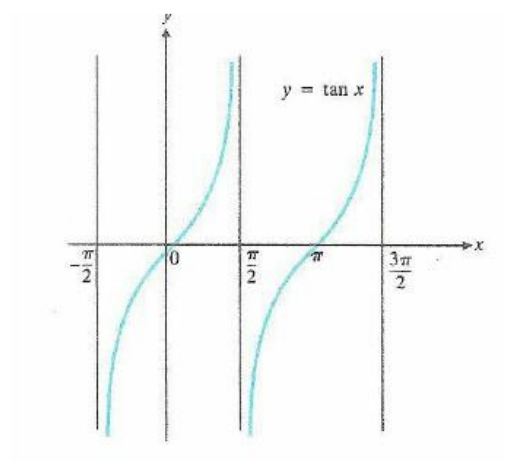
تابع $y = x^2$ در $(-\infty, 0)$ که در آنجا مشتق $y' = 2x$ منفی است نزول می‌کند، و در $(0, \infty)$ که در آنجا مشتق مثبت است صعود می‌کند. بین اینها $y' = 0$ و مماس بر خم افقی است.

اگر بدانیم که مشتق تابع کجا مثبت، کجا منفی، یا کجا صفر است، نگاه می‌توانیم درباره‌ی شکل نمودار آن تابع اطلاعاتی به دست آوریم. به زودی خواهیم دید با دانستن این مطلب می‌توان مشخص کرد که نمودار در کجا بالا می‌رود، پایین می‌آید، یا مماس افقی دارد. نخست شکل‌های زیر را مشاهده کنید.



۳۹.۰.۵

نمودار $y = \sin x$ بر دامنه‌اش بی‌نهایت بار بالا و پایین می‌رود. جایی که مشتق $y' = \cos x$ مثبت است بالا می‌رود، و جایی که منفی است پایین می‌آید. در نقاط تحول بین بالا رفتن و پایین آمدن، $y' = 0$ ، و مماس‌ها افقی‌اند.



۴۰.۰.۵ توابع صعودی و نزولی

تابعی چون $y = f(x)$ را در سراسر یک بازه‌ی I صعودی گویند هرگاه با افزایش x ، y هم زیاد شود، به این معنا که وقتی در I ، $x_2 > x_1$ داشته باشیم $f(x_2) > f(x_1)$. به همین ترتیب، $y = f(x)$ در سراسر I نزول می‌کند هرگاه با کاهش x ، y نیز کم شود. پس وقتی در I ، $x_2 > x_1$ داریم $f(x_2) < f(x_1)$. وقتی x در I از چپ به راست حرکت می‌کند نمودار یک تابع صعودی خیز می‌گیرد، و نمودار یک تابع نزولی افت می‌کند. همان‌گونه که دیده‌ایم، ممکن است تابعی بر یک بازه صعودی، و بر بازه‌ی دیگر نزول کند.

طبق شکل‌های فوق، صعود با مشتق‌های مثبت همراه است و نزول با مشتق‌های منفی. در بخش‌های بعدی نشان خواهیم داد که اگر f' در هر نقطه از یک بازه I مثبت باشد، آنگاه f بر I صعود می‌کند و اگر f' در هر نقطه از I منفی باشد، آنگاه f بر I نزول می‌کند. این واقعیت‌ها را فعلاً به عنوان آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی بودن می‌پذیریم.

۴۱.۰.۵ آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی بودن

فرض کنید که یک تابع f در هر نقطه چون x از یک بازه‌ی I مشتق داشته باشد آنگاه

f بر I صعودی است، هرگاه به ازای هر x در I ، $f'(x) > 0$.

f بر I نزولی است، هرگاه به ازای هر x در I ، $f'(x) < 0$.

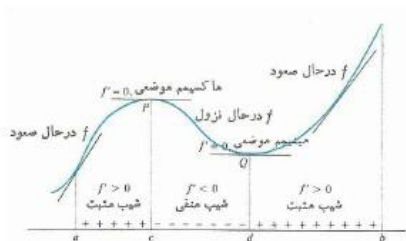
آزمون مشتق اول به زبان هندسی حاکی است که توابع مشتق‌پذیر بر بازه‌هایی صعود می‌کنند که نمودارشان شیب مثبت داشته باشد، و بر بازه‌هایی نزول می‌کنند که نمودارشان شیب منفی داشته باشند.

۴۲.۰.۵ مماس‌های افقی

از آنجا که مشتقی چون f' در هر بازه‌ی I بی‌ f' تعریف شود دارای ویژگی مقدار میانی است، هر وقت

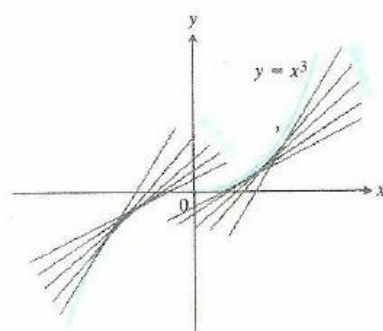
f' در این بازه تغییر علامت می‌دهد، باید مقدارش صفر شود. پس هر وقت f' در بازه I تغییر علامت می‌دهد، نمودار f باید مماس افقی داشته باشد.

اگر وقتی x از چپ به راست می‌رود و از نقطه‌ای چون c می‌گذرد، مقدار f' از مثبت به منفی تبدیل شود، آنگاه مقدار f در c یک مقدار ماکسیمم موضعی f است. (شکل زیر را ببینید). یعنی $f(c)$ بزرگترین مقداری است که تابع در یک همسایگی نزدیک $x = c$ دارد. به همین ترتیب، اگر وقتی x از چپ به راست حرکت کند و از نقطه‌ای چون d می‌گذرد، مقدار f' از منفی به مثبت تبدیل شود، آنگاه مقدار f در d یک مقدار مینیمم موضعی f است. یعنی، $f(d)$ کوچکترین مقداری است که تابع در یک همسایگی نزدیک $x = d$ دارد.



۴۳.۰.۵ تقعر و نقطه‌ی عطف

در این بخش چگونگی رسم دقیق‌تر نمودار با استفاده از علامت مشتق دوم تابع را تشریح می‌کنیم. همانطور که در شکل زیر دیده می‌شود، تابع $y = x^3$ همواره با افزایش x ، صعود می‌کند، اما، قسمی از خم که مربوط به بازه‌ی



تقعر نمودار $y = x^3$ در سمت چپ
رو به پایین و در سمت راست رو به بالاست.

$(-\infty, 0)$ است و قسمت مربوط به $(0, \infty)$ در جهت‌های متفاوتی می‌پیچند. اگر در امتداد خم از سمت چپ به طرف مبدأ برویم، پیچش خم به سمت راست است. وقتی از مبدأ دور می‌شویم، خم به سمت چپ می‌پیچد. قسمت چپ «به پایین خم می‌شود»، و قسمت راست «به بالا خم می‌شود». توصیف پیچش به طریق دیگر این است که وقتی نقطه تماس از سمت چپ به مبدأ میل می‌کند، مماس بر خم در جهت ساعت می‌چرخد. در این حالت شیب خم تقلیل می‌یابد. وقتی نقطه‌ی تماس از مبدأ وارد ربع اول می‌شود، مماس در خلاف جهت ساعت می‌چرخد. در این حالت شیب خم زیاد می‌شود. می‌گوییم که تقعر خم $y = x^3$ بر بازه‌ی $(-\infty, 0)$ که در آن y' کم می‌شود رو به پایین است، و بر بازه‌ی $(0, \infty)$ که در آن y' زیاد می‌شود رو به بالاست. پس تعریف تقعر نمودار توابع مشتق‌پذیر به شرح زیر است.

تعریف ۲۷۱.۰.۵. تقعر رو به پایین و تقعر رو به بالا:

نمودار تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ در بازه‌ای که y' کم می‌شود تقعر رو به پایین دارد، و در بازه‌ای که y' زیاد می‌شود تقعر رو به بالا دارد.

اگر تابع $y = f(x)$ علاوه بر مشتق اول، مشتق دوم هم داشته باشد (بیشتر توابعی که در این کتاب در نظر می‌گیریم از این نوع هستند) می‌توانیم آزمون مشتق اول را در مورد تابع $f' = y'$ به کار ببریم و نتیجه بگیریم که اگر $y', y'' < 0$ ، y' تقلیل می‌یابد، و اگر $y', y'' > 0$ ، y' زیاد می‌شود. بنابراین، آزمونی داریم که می‌توانیم آن را در مورد فرمول $y = f(x)$ به کار ببریم و تقعر نمودارش را تعیین کنیم، نام این آزمون، آزمون مشتق دوم برای تقعر است.

۴۴.۰.۵ آزمون مشتق دوم برای تقعر

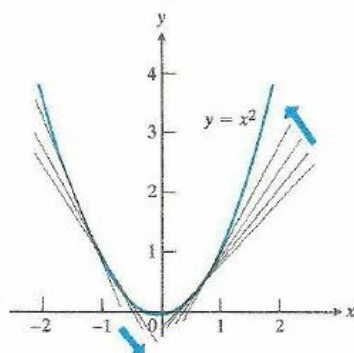
نمودار $y = f(x)$

در بازه‌ای که $y'' < 0$ ، تقعر رو به پایین دارد.

در بازه‌ای که $y'' > 0$ ، تقعر رو به بالا دارد.

مفهوم این آزمون، این است که اگر $y'' < 0$ ، آنگاه با افزایش x ، y' کاهش می‌یابد و مماس در جهت ساعت می‌چرخد. برعکس، اگر $y'' > 0$ ، آنگاه وقتی x زیاد می‌شود، y' افزایش می‌یابد و مماس در خلاف جهت ساعت می‌چرخد.

مثال ۲۷۲.۰.۵. شکل زیر را ببینید. بر سراسر محور x ، خم $y = x^2$ تقعر رو به بالا دارد زیرا $y'' = 2 > 0$.



نمودار $y = x^2$ تقعر رو به بالا دارد.
وقتی x زیاد می‌شود، مماس در خلاف جهت
ساعت می‌چرخد؛ y' زیاد می‌شود.

۴۵.۰.۵ نقطه عطف

نقطه‌ای از خم که در آن تقعر عوض می‌شود **نقطه عطف** نام دارد. پس نقطه‌ی عطف خمی که دو بار مشتق‌پذیر است نقطه‌ای است که y'' در یک طرفش مثبت، و در طرف دیگرش منفی است. در نقطه‌ی عطف y'' صفر است زیرا مشتق‌ها دارای ویژگی مقدار میانی هستند.

ممکن است y'' در نقطه‌ای که نقطه‌ی عطف نیست صفر باشد، و باید به این نکته توجه داشت.

مثال ۲۷۳.۰.۵. شکل (۴۳.۰.۵) را ببینید. خم $y = x^3$ یک نقطه‌ی عطف در $x = 0$ دارد که در آن $y'' = 6x$ تغییر علامت می‌دهد.

تعریف ۲۷۴.۰.۵. وقتی یک نقطه‌ی P روی نمودار تابعی چون $y = f(x)$ رفته رفته از مبدأ دور می‌شود، ممکن است فاصله‌ی بین P و خطی ثابت به صفر نزدیک شود، به عبارت دیگر، خم وقتی از مبدأ دور می‌شود، به خط «میل کند». در این حالت، خط را **مجانِب نمودار** می‌نامند.

تعریف ۲۷۵.۰.۵. **مجانِب‌های افقی و قائم**

خط $y = b$ **مجانِب افقی** نمودار تابع $y = f(x)$ است اگر داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \text{ یا } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

خط $x = a$ مجانب قائم نمودار تابع است اگر داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

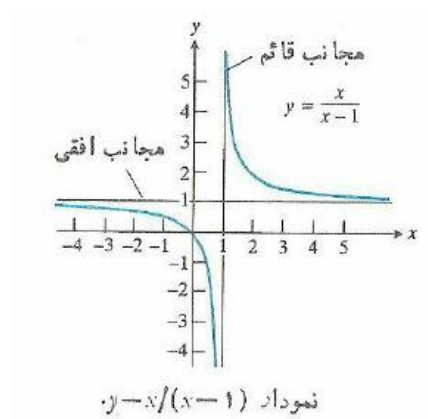
مثال ۰.۵.۲۷۶. مجانب‌های

$$y = \frac{x}{x-1}$$

عبارتند از خط‌های $y = 1$ و $x = 1$ (به شکل زیر مراجعه کنید). این مطلب با تقسیم x بر $x - 1$

$$\begin{array}{r} x \\ x-1 \overline{) x-1} \\ \underline{x-1} \\ 0 \end{array}$$

و سپس نوشتن معادله به صورت



$$y = 1 + \frac{1}{x-1}$$

فورا آشکار می‌شود.

خط $y = 1$ از سمت راست مجانب است زیرا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = 1.$$

این خط از سمت چپ نیز مجانب است زیرا وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، y باز هم به ۱ میل می‌کند. به ازای مقادیر بزرگ x رفتار

$$y = 1 + \frac{1}{x-1}$$

نظیر رفتار $y = 1$ است.

خط $x = 1$ مجانب قائم شاخه‌ی سمت راست نمودار است زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = \infty$$

و مجانب قائم شاخه‌ی سمت چپ هم هست زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = -\infty.$$

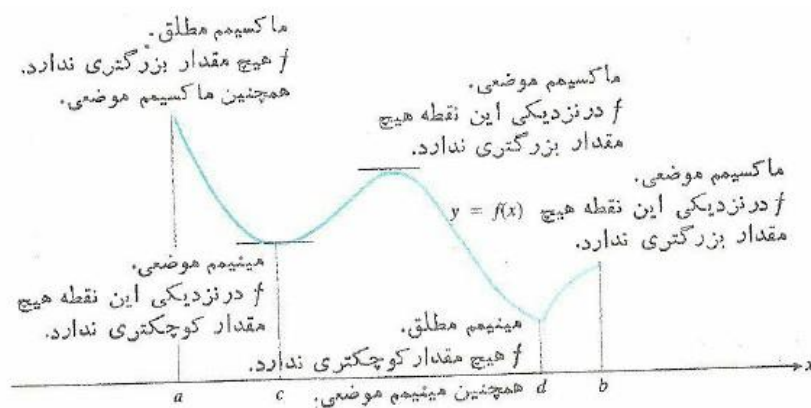
به ازای x های نزدیک ۱ رفتار این تابع شبیه رفتار $y = 1/(x-1)$ است.

۴۶.۰.۵ ماکسیمم و مینیمم

تابعی چون f در $x = c$ یک مینیمم نسبی یا موضعی دارد هرگاه به ازای همه‌ی مقادیر x در یک بازه‌ی باز

حول c داشته باشیم

$$f(c) \leq f(x).$$



(اگر c یک نقطه‌ی انتهایی دامنه‌ی f باشد، بازه نیمباز است، و c یک نقطه‌ی انتهایی آن است.) بازه ممکن است کوچک باشد یا بزرگ، اما در این بازه مقدار تابع هیچگاه از $f(c)$ کمتر نیست. در مورد ماکسیمم نسبی یا موضعی در $x = c$ ، به ازای همه‌ی مقادیر x در یک بازه حول c داریم

$$f(c) \geq f(x).$$

در اینجا واژه‌ی نسبی یا موضعی را به کار می‌بریم تا تمایزی بین این نقطه و یک نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم مطلق قائل شویم. در مورد نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم مطلق به ازای تمام x های واقع در دامنه‌ی f ، و نه صرفاً تمام x های واقع در یک بازه‌ی مناسب حول c ، داریم

$$f(x) \leq f(c) \text{ یا } f(x) \geq f(c).$$

قضیه ۲۷۷.۰.۵. قضیه‌ی مشتق اول برای مقادیر اکسترمم موضعی: فرض کنید تابعی چون f در یک نقطه‌ی داخلی مانند c از بازه‌ای که f بر آن تعریف می‌شود، ماکسیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد. اگر f در c تعریف بشود، آنگاه

$$f'(c) = 0.$$

قضیه ۲۷۸.۰.۵. قضیه‌ی مقدار میانگین: اگر $y = f(x)$ در هر نقطه از بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته و در هر

نقطه از بازه‌ی باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه دست کم یک نقطه چون c بین a و b وجود دارد که

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

قضیه ۲۷۹.۰.۵. قاعده‌ی هوییتال (صورت اول)

فرض کنید که $f(a) = g(a) = 0$ ، $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته باشند، و $g'(a) \neq 0$. آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

برای یافتن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

با استفاده از قاعده‌ی هوییتال، به مشتق گرفتن از f و g در $x = a$ مادام که به صورت $0/0$ یا ∞/∞ به دست می‌آید ادامه دهید. به محض اینکه به چیز دیگری رسیدید مشتق‌گیری را متوقف سازید. وقتی هر یک از صورت یا مخرج، حد ناصفر متناهی داشته باشد، قاعده‌ی هوییتال کاربرد ندارد.

فصل ششم

انتگرال

۴۷.۰.۶ انتگرال نامعین

تعریف ۲۸۰.۰.۶. هرگاه توابع $f(x)$ و $F(x)$ بر بازه‌ی I طوری تعریف شده باشند که به ازای هر x داشته باشیم

$$f(x) = F'(x)$$

آنگاه $F(x)$ را یک تابع اولیه (ضد مشتق) $f(x)$ در فاصله I می‌نامیم.

نکته ۲۸۱.۰.۶. به جای تابع اولیه می‌گوییم یک تابع اولیه زیرا رابطه زیر نشان می‌دهد اگر $F(X)$ یک تابع اولیه

$f(x)$ باشد در این صورت $F(x) + c$ که در آن c مقدار ثابتی است نیز یک تابع اولیه $f(x)$ می‌باشد.

$$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$$

به عبارت دیگر تفاوت در تابع اولیه $f(x)$ مانند $F_1(x), F_2(x)$ مقداری است ثابت.

تعریف ۲۸۲.۰.۶. اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد آن را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ می‌گوییم و با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت.

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

نماد $\int$ را علامت انتگرال و عبارت $f(x)dx$ را عبارت زیر انتگرال می‌نامیم.

قضیه ۲۸۳.۰.۶. اگر $n \neq -1$ ، آنگاه:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

و در حالت کلی داریم:

$$\int f'(x)f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c.$$

مثال ۲۸۴.۰.۶. (۱)

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

(۲)

$$\int 4x dx = 4 \int x dx = \frac{4}{2} x^2 + c$$

(۳)

$$\int -5x^3 dx = -5 \int x^3 dx = -5 \times \frac{1}{4} x^4 + c = -\frac{5}{4} x^4 + c$$

(۴)

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{-1}{-\frac{3}{5}+1} x^{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} + c$$

۴۸.۰.۶ روابط پر کاربرد انتگرال

با استفاده از تعریف انتگرال نامعین معلوم می‌شود که هر دستور مشتق‌گیری می‌تواند رابطه‌ای برای به دست آوردن تابع اولیه نیز باشد. لذا:

قضیه ۲۸۵.۰.۶. روابط زیر برقرار است.

(۱)

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$$

(۲)

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c$$

(۳)

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$$

(۴)

$$\int -\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\arcsin \frac{u}{a} + c = \arccos \frac{u}{a} + c$$

(۵)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

(۶)

$$\int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + c$$

(۷)

$$\int (1 + \cot^2 u) du = -\cot u + c$$

(۸)

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

(۹)

$$\int e^{ku} du = \frac{1}{k} e^{ku} + c$$

(۹)

$$\int a^{ku} du = \frac{a^{ku}}{k \times \ln a} + c$$

با استفاده از فرمول‌های فوق داریم:

مثال ۶.۰.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(۱)

$$\int \cos 3x dx$$

پاسخ ۶.۰.۶.۲۸۷.

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

(۲)

$$\int \sin \frac{x}{3} dx$$

پاسخ ۶.۰.۶.۲۸۸.

$$\int \sin \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{x}{3} + c$$

(۳)

$$\int \frac{dx}{9 + x^2}$$

پاسخ ۲۸۹۰۰۶.

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + c$$

۴۹۰۰۶ انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

می‌خواهیم مقدار $\int f(g(x))g'(x)dx$ را محاسبه نماییم و می‌دانیم تابع اولیه $f(g(x))$ موجود است اما مستقیماً نمی‌توان آن را حساب کرد. برای محاسبه آن، تابع را به صورت ساده‌تر تغییر شکل می‌دهیم و تابع اولیه این صورت ساده را محاسبه می‌کنیم.

با فرض $t = g(x)$ که در آن t یک متغیر جدید و g تابع پیوسته و مشتق پذیر است خواهیم داشت $dt = g'(x)dx$.
در نتیجه:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + c$$

مثال ۲۹۰۰۰۶. $\int 2x\sqrt{3+x^2}dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۲۹۱۰۰۶. متغیر $u = 3 + x^2$ را در نظر می‌گیریم داریم:

$$2x dx = du$$

یا

$$x dx = \frac{1}{2} du$$

پس:

$$\int 2x\sqrt{3+x^2}dx = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال ۲۹۲.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{x+5}$$

پاسخ ۲۹۳.۰.۶.

$$\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |x+5| + c$$

$$x+5 = u \implies dx = du$$

مثال ۲۹۴.۰.۶. $\int \tan^n \theta \sec^2 \theta d\theta$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۲۹۵.۰.۶. تغییر متغیر $\tan \theta = u$ را در نظر می‌گیریم، داریم

$$(1 + \tan^2 \theta) d\theta = du$$

یا

$$\sec^2 \theta d\theta = du$$

پس

$$\int \tan^n \theta \sec^2 \theta d\theta = \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} \theta + c$$

۵۰.۰.۶ انتگرال به روش جزء به جزء

می‌دانیم اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر در بازه I باشند در این بازه داریم:

$$d(uv) = u dv + v du \implies u dv = d(uv) - v du$$

با انتگرال گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \implies \int u dv = uv - \int v du$$

مثال ۲۹۶.۰.۶. $\int x \sin x dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۲۹۷.۰.۶. عبارت $x \sin x dx$ را در نظر می گیریم، باید قسمتی از آن را u و بقیه را dv انتخاب کنیم، قرار می دهیم:

$$dv = \sin x dx, \quad u = x$$

بنابراین $du = dx$ و $v = \int \sin x dx = -\cos x$ با استفاده از دستور جزء به جزء داریم:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

مثال ۲۹۸.۰.۶. $\int x^2 \ln x dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۲۹۹.۰.۶. قرار می دهیم:

$$dv = x^2 dx, \quad u = \ln x$$

پس:

$$v = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3, \quad du = \frac{1}{x}dx$$

به نا به دستور جزء به جزء داریم:

$$\frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

۵۱.۰.۶ انتگرال گیری به روش جدول انتگرالی

هرگاه عبارت زیر انتگرال حاصلضرب دو تابع باشد که یکی از توابع با گرفتن تعدا متناهی مشتق به صفر برسد و تابع دیگری به راحتی قابل انتگرال گیری متوالی باشد از روش جدول انتگرالی استفاده می نماییم. بدین صورت که در این جدول دو ستون تشکیل می دهیم و در یکی از ستون ها مشتقات متوالی تابع را می نویسم و در ستون دوم انتگرال های متوالی تابع دیگر را می نویسیم سپس به صورت اریب توابع حاصل را در هم ضرب نموده و به طور یک در میان علامت را در منفی ضرب می نماییم.

مثال ۳۰۰.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x \sin x dx$$

پاسخ ۳۰۱.۰.۶.

+	x	$\sin x$
-	1	$-\cos x$
+	0	$-\sin x$
		$+\cos x$

$$\int x \sin x dx = +x \times (-\cos x) - 1 \times (-\sin x) + 0 \times \cos x$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

مثال ۳۰۲.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x^5 e^x dx$$

پاسخ ۳۰۳.۰.۶.

+	x^5	e^x
-	$5x^4$	e^x
+	$20x^3$	e^x
-	$60x^2$	e^x
+	$120x$	e^x
+	120	e^x

$$\begin{aligned} \int x^5 e^x dx &= +x^5 \times e^x - 5x^4 \times e^x + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120e^x + c \\ &= x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x + 120x e^x - 120e^x + c \end{aligned}$$

تعریف ۳۰۴.۰.۶. تابع لگاریتم طبیعی $y = \ln x$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

۵۲.۰.۶ انتگرال گیری از توابع مثلثاتی

برای محاسبه انتگرال های توابع مثلثاتی آن ها را به حالت های زیر تقسیم می کنیم.

حالت اول: محاسبه انتگرال های $\int \sin^n x dx$ یا $\int \cos^n x dx$ در صورتی که n عدد صحیح فرد باشد ($n = 2k + 1$) در این حالت تعداد عامل با توان زوج تابع مورد نظر را جدا کرده و فقط یک عامل با توان

یک را باقی می‌گذاریم سپس طبق روش زیر تابع با توان زوج را تبدیل به نسبت مثلثاتی دیگر می‌کنیم.

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-2} x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^{k-1} \sin x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^{k-1} \cos x dx$$

مثال ۳۰۵.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin^3 x dx$$

پاسخ ۳۰۶.۰.۶. پس $n = 3$ می‌باشد لذا $2k = 2$ را طبق روش زیر جدا می‌نامیم.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx \\ &= -\cos x - \int \cos^2 x \sin x dx \end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\cos x = u$ برای انتگرال باقیمانده خواهیم داشت:

$$\cos x = u \implies -\sin x dx = du$$

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \int u^2 \times -du = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

لذا خواهیم داشت:

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x - \left(-\frac{\cos^3 x}{3} \right) + c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

مثال ۳۰۷.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \cos^3 x dx$$

پاسخ ۳۰۸.۰.۶. مانند مثال قبل $n = 3$ می‌باشد لذا توان $2k = 2$ را جدا نموده و به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx = \sin x - \int \sin^2 x \cos x dx\end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\sin x = u$ خواهیم داشت:

$$\sin x = u \implies \cos x dx = du$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

لذا خواهیم داشت:

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

حالت دوم: محاسبه انتگرال‌های $\int \sin^n x dx$ یا $\int \cos^n x dx$ در صورتی که n عدد صحیح زوج باشد.

در این حالت از روابط مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال ۳۰۹.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin^2 x dx$$

پاسخ ۳۱۰.۰.۶.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + c = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \end{aligned}$$

حالت سوم: محاسبه انتگرال $\int \sin^n x \cos^m x dx$ در صورتی که حداقل یکی از توان‌ها فرد باشد.

در این حالت مانند حالت اول عمل می‌کنیم بدین صورت که فقط یکی از توان‌های فرد را (مثلاً n) به صورت

$n = 2k + 1$ نوشته و توان دیگر را تغییر نمی‌دهیم و همانند حالت اول حل می‌کنیم.

حالت چهارم: محاسبه انتگرال $\int \sin^n x \cos^m x dx$ در صورتی که m و n هر دو زوج باشند.

در این حالت برای هر دو تابع از روابط مثلثاتی داده شده در حالت دوم استفاده می‌کنیم.

حالت پنجم: محاسبه انتگرال $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ یا $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ یا $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ در این

حالت از روابط مثلثاتی زیر استفاده می‌نماییم.

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x)$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x)$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x)$$

مثال ۳۱۱.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin 3x \cos 2x dx$$

پاسخ ۳۱۲.۰.۶.

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 2x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin(3-2)x + \sin(3+2)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \sin x dx + \int \sin 5x dx \right) \\ &= \frac{-1}{2} \cos x dx - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \cos 5x + c \end{aligned}$$

مثال ۳۱۳.۰.۶. مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

پاسخ ۳۱۴.۰.۶. این کسر گویا است و اعداد ۲ و ۳ ریشه‌های مخرج آن هستند، داریم:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{(x-2)(x-3)}$$

چون مخرج دو کسر برابرند باید صورت‌های آن‌ها نیز برابر باشند، پس:

$$1 = (A+B)x - 3A - 2B$$

این رابطه اتحادی بر حسب x خواهد بود اگر و تنها اگر ضرایب توان‌های برابر x در دو طرف یکی باشند:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - 2B = 1 \end{cases}$$

این دستگاه را نسبت به A و B حل می‌کنیم داریم:

$$B = 1, \quad A = -1$$

پس:

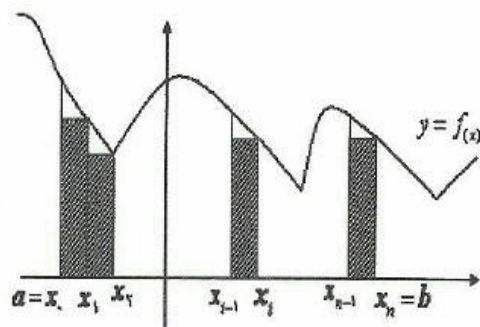
$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

بنابراین

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x-3} dx = -\ln |x-2| + \ln |x-3| + c$$

۵۳.۰.۶ انتگرال معین

هرگاه تابع $f(x)$ بر بازه $[a, b]$ به صورت زیر داده شده باشد:



به طوری که فاصله $[a, b]$ به n زیر بازه زیر تقسیم شده باشد.

$$[x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

و داشته باشیم:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$$

همچنین $f(x_i)$ مقدار f بر نقطه x_i از بازه i ام یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ باشد و

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

آنگاه اگر A بیانگر سطح زیر منحنی باشد خواهیم داشت:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i x$$

تعریف ۳۱۵.۰.۶. با مفروضات فوق مقدار عبارت زیر را مجموع ریمانی می‌نامیم

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i x$$

همچنین مقدار عبارت زیر را حد مجموع ریمانی می‌نامیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i x$$

اگر حد فوق موجود باشد در این صورت تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر می‌باشد و انتگرال معین تابع f بر بازه $[a, b]$ که با نماد $\int_a^b f(x) dx$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i x$$

۵۴.۰.۶ خواص انتگرال معین

قضیه ۳۱۶.۰.۶. اگر توابع f و g در بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشند خواهیم داشت:

(۱) k عدد ثابت است.

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

(۲)

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

(۳)

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(۴)

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(۵)

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(۶) اگر $a < c < b$ باشد داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

قضیه ۳۱۷.۰.۶. قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها

اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد نقطه‌ای مانند c در این بازه موجود است به طوری که داریم:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

 $f(c)$ را مقدار متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ می‌نامیم.

قضیه ۳۱۸.۰.۶. قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنید دو تابع $F(x)$ و $f(x)$ بر بازه بسته $[a, b]$ چنان باشند که در این بازه همواره داشته باشیم:
در این صورت داریم:

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ۳۱۹.۰.۶. مقدار انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_1^{\sqrt{e}} (x^{\sqrt{e}} + x)dx$$

پاسخ ۰.۰۶۳۲۰.

$$\int_1^2 (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} = \frac{14+9}{6} = \frac{23}{6}$$

دانشجویان موفق باشید