Differential Equation

معادلات دیفرانسیل

دانشکده فنی و حرفه ای کشاورزی مراغه

دکتر امین تنهائی وش

سال تحصیلی ۹۹-۹۸

سرفصل:

تعریف: معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که شامل یک یا چند مشتق یا دیفرانسیل باشد.
معادلات دیفرانسیل براساس ویژگی‌های زیر رده‌بندی می‌شوند.

الف) نوع (عادی یا جزئی) ب) مرتبه پ) درجه

تعریف: هر معادله که در ضابطه آن علاوه بر متغیر مستقل و متغیر تابعی، مشتقات مراتب مختلف متغیر تابعی نسبت به متغیر مستقل نیز حاضر باشند، معادلات دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شوند.

تعریف: بالاترین مرتبه مشتق‌گیری حاضر در ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را مرتبه آن معادله دیفرانسیل گویند.
به عنوان مثال معادله دیفرانسیل مرتبه n، با متغیر مستقل x و متغیر تابعی y دارای نمایش عمومی $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$ است.

تعریف: اگر بتوان ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را نسبت به مرتبه مشتق‌گیری بصورت یک چند جمله‌ای نوشت، بزرگترین توان در جملات تعیین‌کننده مرتبه را درجه آن معادله دیفرانسیل گویند. به عنوان مثال:

- معادله دیفرانسیل $xy'+y=\sec x$ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۱، با درجه ۱ و نسبت به y برحسب x است.
- معادله دیفرانسیل $u''+u=\sec x$ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲، با درجه ۱ و نسبت به u برحسب x است.

تعریف: هر تابع که در ضابطه یک معادله دیفرانسیل مفروض صدق کند جواب آن معادله دیفرانسیل خوانده می‌شود.
لازم به ذکر است تابع جواب می‌تواند به هر ۳ نمایش صریح، ضمنی و پارامتری بیان گردد.

مثال: ثابت کنید تابع $y=\sin x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ است؟

$$(y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \Rightarrow y''=-\sin x) \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}$$

$$y''+y=-\sin x+\sin x=0$$

پس $y=\sin x$ در معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ صدق می‌کند.

جواب یک معادله دیفرانسیل: جواب معادله دیفرانسیل را می‌توان به یکی از صورتهای زیر محاسبه کرد

(۱) جواب عمومی (۲) جواب خصوصی

(۱) - اگر جواب معادله دیفرانسیل توسط یک رابطه با ثابتهای دلخواه بیان گردد جواب عمومی آن معادله نامیده می‌شود. درواقع جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل بصورت یک دسته منحنی n- پارامتری با نمایش عمومی $g(x, y, c_1, \dots, c_n)=0$ ارائه می‌گردد.

(۲) - اگر جواب معادله دیفرانسیل، فاقد هرگونه ثابت دلخواه و با اعمال شرایط اولیه بر جواب عمومی بدست آید جواب خصوصی یا به تعبیر هندسی خم انتگرال نامیده می‌شود.

- لازم به ذکر است که شرایط موجود در یک معادله دیفرانسیل، که منجر به تعیین ثابت‌های حاضر در نمایش جواب عمومی می‌گردند شرایط اولیه نامیده می‌شوند. و همچنین یک معادله دیفرانسیل همراه با شرط اولیه را مسأله با مقدار اولیه می‌نامیم.

مثال: دسته منحنی ۱-پارامتری $y=ce^{x}$، جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'-y=0$ است.
جوابی از این معادله با شرط اولیه $y(0)=1$ اینگونه بدست می‌آید:

$$y=ce^{x} \xrightarrow{x=0} y(0)=ce^{0} \xrightarrow{y(0)=1} c=1$$

که در اینصورت $y=e^{x}$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'-y=0$ می‌باشد که از نقطه $(0,1)$ عبور می‌کند.

تعریف: اگر جواب معادله دیفرانسیل به ازای هیچ شرایط اولیه‌ای از جواب عمومی بدست نیاید جواب غیرعادی نامیده می‌شود.

تعریف: هر معادله دیفرانسیل با نمایش

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n نامیده می‌شود. این دسته از معادلات فقط دارای جواب عمومی بوده و جواب غیرعادی ندارند.

مثال: نشان دهید معادله دیفرانسیل $(x^2-1)y'=2nxy$ دارای جواب $y=(x^2-1)^n$ می‌باشد؟

حل)
$$y=(x^2-1)^n \Rightarrow y'=n(2x)(x^2-1)^{n-1} \Rightarrow y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{(x^2-1)\times \text{طرفین}} (x^2-1)y'=2nx(x^2-1)^n \xrightarrow{(x^2-1)^n=y} (x^2-1)y'=2nxy$$

تعریف: اگر همه جملات معادله نسبت به تابع مجهول و مشتقات آن از درجه ۱ باشند معادله را خطی گویند و در غیر این صورت غیرخطی.

مثال: خطی $y'+y=1$ ، غیرخطی $yy'+\sin y=0$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

معادله مرتبه اول را می‌توان به فرم‌های زیر نوشت.

$y'=f(x,y)$ یا $p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0$

مثال:

$$\frac{dy}{dx} \quad y'=\frac{x(y+1)}{(x^2+1)y} \Rightarrow \underbrace{(x^2+1)y}_{q}\,dy-\underbrace{x(y+1)}_{p}\,dx=0$$

الف) معادله دیفرانسیل $p\,dx+q\,dy=0$ را تفکیک پذیر گویند هرگاه p تابعی فقط از x و q تابعی فقط از y باشد. مثال: (تفکیک پذیر)

$$\frac{y}{y+1}\,dy=\frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\xRightarrow{\int} \int\frac{y+1-1}{y+1}\,dy+\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+c$$

$$\Rightarrow \int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx+c$$

(مشتق مخرج در صورت باشد یعنی ln داریم)

$$y-\ln(y+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$ جواب عمومی معادله

مثال:

$$x^2yy'-e^y=0$$

حل: $x^2y\dfrac{dy}{dx}=e^y \rightarrow x^2y\,dy=e^y\,dx \qquad ye^{-y}\,dy=\dfrac{dx}{x^2}$ تفکیک پذیر

$$\xRightarrow{\int} \int ye^{-y}\,dy=\int\frac{dx}{x^2}+c$$

	D مشتق	انتگرال
$\pm$	y	e^{-y}
	1	$-e^{-y}$
	0	e^{-y}

$$-ye^{-y}-e^{-y}=-\frac{1}{x}+c$$ جواب عمومی معادله

حالت خاص: معادلاتی به فرم $y'=f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $t=ax+by+c$ تفکیک پذیر می شود.

1) $y'=2x+y$ 2) $y'=\cos(x-y)$ 3) $y'=-2(2x+3y)^2$

تعریف همگن: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گویند هرگاه

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

مثال: همگن از درجه دوم

$$f(x,y)=x^2-3xy+2y^2$$

$$(tx)^2-3tx\,ty+2(ty)^2=t^2(\overbrace{x^2-3xy+2y^2}^{f(x,y)})$$

(به عبارت دیگر f همگن است اگر درجه همه ی جملات آن برابر باشند)

معادله ی $p\,dx+q\,dy=0$ را همگن گویند اگر p و q توابعی همگن از درجه یکسان باشند.

مثال:

① $xy' = (1-x^2)\cot y$

حل) $x\dfrac{dy}{dx} = (1-x^2)\cot y$

$$\frac{dy}{\cot y} = \frac{(1-x^2)}{x}\,dx \qquad \text{تفکیک پذیر}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)dx \Rightarrow -\ln\cos y = \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

نکته: تغییر متغیر $dy = x\,dz + z\,dx$ و $y = xz$ معادله‌ی همگن را تفکیک پذیر می‌کند.

② $\left(xe^{\frac{y}{x}} + y\right)dx - x\,dy = 0$

حل) $y = xz \qquad dy = x\,dz + z\,dx$

$$(xe^{z} + xz)\,dx = x(x\,dz + z\,dx)$$

$$\xrightarrow{\div x} e^{z}dx + \cancel{z\,dx} = x\,dz + \cancel{z\,dx} \Rightarrow \frac{dz}{e^{z}} = \frac{dx}{x} \qquad \text{تفکیک پذیر}$$

$$\xrightarrow{\int} -e^{-z} = \ln x + c \Rightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln x + c$$

حالت های خاص همگن:

اگر $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a'x + b'y + c}\right)$

الف) اگر $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ (دو خط موازی باشند) تغییر متغیر $t = ax + by$ معادله فوق را تفکیک پذیر می‌کند.

ب) اگر $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ (دو خط غیر موازی هستند) اگر (x_0, y_0) مختصات محل برخورد دو خط باشند تغییر متغیر
$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$
معادله را همگن می‌کند.

مثال:

$$y' = \frac{x - 3y + 3}{2x - 4y + 1}$$

حل) $y' = \dfrac{x - 3y + 3}{2x - 4y + 1}$ $\qquad \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{-4}$ دو خط موازی

$$t = x - 3y \quad , \quad t' = 1 - 3y' \Rightarrow y' = \frac{3t + t'}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{1 - t'}{3} = \frac{t+3}{2t+1} \Rightarrow 1 - t' = \frac{3t+9}{2t+1} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{3t+9}{2t+1} = \frac{-t-8}{2t+1} \xrightarrow{\times dx} \frac{2t+1}{t+8}\, dt = -dx$$ تفکیک پذیر

$$\Rightarrow \int \frac{2t+\overset{16-15}{1}}{t+8}\, dt = -\int dx + c$$

$$\Rightarrow \int \left(2t - \frac{15}{t+8} \right) dt = -\int dx + c$$

$$\Rightarrow t^2 - 15 \ln(t+8) = -x + c \Rightarrow$$ جایگذاری $t = x - 3y$

حالت خاص همگن :

بعضی از معادلات را با تغییر متغیر $y = t^{\alpha}$ و انتخاب مناسب α به معادله‌ی همگن تبدیل کرده

معادلات دیفرانسیل کامل :

$$f(x,y) = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

دیفرانسیل کامل

معادله $p\,dx + q\,dy = 0$ دیفرانسیل کامل است اگر تابع $f(x,y) = 0$ چنان موجود باشد که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = p \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = q \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial x} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}}$$ شرط کامل بودن

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 \underset{\text{کامل}}{=} \frac{\partial q}{\partial x} = 1$$

به عبارت دیگر به طور خلاصه دیفرانسیل کامل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

مثال :

$$(\underbrace{y^2 e^{xy^2} + 4x^3}_{p})\, dx + (\underbrace{2xy\, e^{xy^2} - 3y^2}_{q})\, dy = 0$$

۴ ص

حل

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2y\, e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

معادله کامل است

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2y\, e^{xy^2} + 2x\, y^3 e^{xy^2}$$

$$f(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = p & \text{I} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = q & \text{II} \end{cases} \xRightarrow{\int dx}$$

انتگرال نسبت به x

+ ثابت

$$f = \int p\,dx = \int \left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) dx = e^{xy^2} + x^4 + g(y)$$

مشتق نسبت به y

$$\xRightarrow{\partial/\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = 2x\, y\, e^{xy^2} + g'(y) \overset{\text{II}}{=} \underbrace{2xy\, e^{xy^2} - 3y^2}_{q}$$

$$\Rightarrow g'(y) = -3y^2 \xRightarrow{\int} g(y) = -y^3 + c$$

در ضابطه f قرار می دهیم $\;f = e^{xy^2} + x^4 - y^3 + c = 0\;$ جواب عمومی

معادلات دارای فاکتور انتگرال : (عامل انتگرال ساز)

$$* \quad \underbrace{y\,dx}_{p} - \underbrace{x\,dy}_{q} = 0$$

کامل نیست

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial q}{\partial x} = -1$$

$\times \frac{1}{x^2}$ (عامل انتگرال ساز یا فاکتور انتگرال)

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\frac{y}{x^2}\,dx}_{p} - \underbrace{\frac{1}{x}\,dy}_{q} = 0$$

کامل

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

بار دیگر

$$* \xRightarrow{\frac{1}{xy}} \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

قضیه: اگر معادله $p\,dx + q\,dy = 0$ کامل نباشد حتماً دارای فاکتور انتگرال است.

روش های پیدا کردن فاکتور انتگرال :

فرض کنیم $pdx + qdy = 0$ کامل نباشد و با ضرب کردن در فاکتور انتگرال F کامل می شود .

$$pFdx + qFdy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(pF) = \frac{\partial}{\partial x}(qF)$$

$$F\frac{\partial p}{\partial y} + p\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$F\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = q\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial F}{\partial y} \quad *$$

الف) اگر F تابعی فقط از x باشد آنگاه $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ و در * داریم :

$$F\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = q\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} = f(x)$$

شرط اینکه F تابعی از x باشد

$$\times dx \Rightarrow \frac{dF}{F} = f(x)dx \xRightarrow{\int} \ln F = \int f(x)dx \Rightarrow$$

فرمول فاکتور انتگرال

$$F = e^{\int f(x)dx}$$

ب) اگر F تابعی فقط از y باشد آنگاه از * و $\frac{\partial F}{\partial x}$ داریم :

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{-p} = f(y) \quad , \quad F = e^{\int f(y)dy}$$

ج) اگر F تابعی از $Z = xy$ باشد

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial y} = x\frac{\partial F}{\partial Z}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} F\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = (yq - xp)\frac{\partial F}{\partial Z}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial Z}}{F} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{yq - xp} = f(Z) \qquad Z = xy \Rightarrow F = e^{\int f(Z)dZ}$$

ص ۸

① $$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}}{q}=f(x) \Rightarrow F=e^{\int f(x)\,dx}$$

② $$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}}{-p}=f(y) \Rightarrow F=e^{\int f(y)\,dy}$$

③ $$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}}{yq-xp}=f(z) \xrightarrow{z=xy} F=e^{\int f(z)\,dz}$$

④ $$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}}{2xq-2yp}=f(z) \qquad z=x^2y^2 \Rightarrow F=e^{\int f(z)\,dz}$$

مثال:

* $$(\underbrace{2y^2+3x}_{p})\,dx+\underbrace{2xy}_{q}\,dy=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=4y \overset{\text{کامل نیست}}{\neq} \frac{\partial q}{\partial x}=2y$$

$$\frac{2y-4y}{-q}=\frac{\cancel{-2y}}{\cancel{-2xy}}=\frac{1}{x}$$

$$F\overset{\text{یا}}{=}\mu=e^{\int \frac{1}{x}dx}=\cancel{e}^{\cancel{\ln} x}=x$$

$$\xrightarrow{\times x} (\underbrace{2y^2x+3x^2}_{p})\,dx+\underbrace{2x^2y}_{q}\,dy$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=4xy \quad \text{(معادله کامل است)}$$

$$f=\int (2y^2x+3x^2)\,dx=2y^2\int x\,dx+3\int x^2dx$$

$$=y^2x^2+\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}=y^2x^2+x^3+g(y)$$

$$\xrightarrow{\partial/\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}=\cancel{2yx^2}+g'(y)=\cancel{2x^2y} \Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=c$$

صت

معادلات خطی مرتبه اول:

فرم معادلات خطی مرتبه اول به صورت زیر است. $y' + f(x)y = r(x)$

معادلات خطی مرتبه اول: حالت اول با استفاده از فاکتور انتگرال قابل حل است اما به دلیل اهمیت موضوع و وجود معادلاتی که قابل تبدیل به خطی مرتبه اول معادلات را به صورت مستقل بررسی می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y + r(x)$$

$$= [-f(x)y + r(x)]\,dx - dy = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -p(x) \neq \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$ کامل نیست

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} = \frac{-f(x)}{-1} = f(x)$$ تابعی از x

$$\Rightarrow F = e^{\int f(x)dx}$$ فاکتور انتگرال

$$\overset{\times F}{\Rightarrow} e^{\int f(x)dx}[y' + f(x)y] = r(x)\,e^{\int f(x)dx}$$

$$\overset{**}{\Rightarrow} \frac{d}{dx}\left[e^{\int f(x)dx}\,y\right] = r(x)\,e^{\int f(x)dx}$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} e^{\int f(x)dx}\,y = \int r(x)\,e^{\int f(x)dx}\,dx$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int f(x)dx}\int r(x)\,e^{\int f(x)dx}\,dx$$

فرمول جواب معادله خطی مرتبه اول

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int f(x)dx}\,y\right] = \frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)dx}\right)y + e^{\int f(x)dx}\,y'$$

$$= f(x)\,e^{\int f(x)dx}\,y + e^{\int f(x)dy}$$

$$\Rightarrow y' = e^{\int f(x)dx}[y' + f(x)y] \quad **$$

فرمول روش دوم

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx\right] + c$$

صـ ۱۵

مثال :

$$xy' + 2y = 8x^2$$

$$\xrightarrow{\div x} y' + \overset{f(x)}{\frac{2}{x}} y = 8x \quad \text{فرم استاندارد}$$

$$F = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

$$\star \xrightarrow{\times x^2} x^2 \left[y' + \frac{2}{x} y \right] = 8x^3$$

$$\overset{\star\star}{\Longrightarrow} \frac{d}{dx}(x^2 y) = 8x^3 \xrightarrow{\int} x^2 y = \int 8x^3 = 2x^4 + c$$

$$\xrightarrow{\div x^2} y = 2x + \frac{c}{x^2}$$

جواب عمومی

روش دوم : جایگذاری در فرمول :

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx} \int 8x \underbrace{e^{\int \frac{2}{x}dx}}_{x^2} dx$$

$$y = \frac{1}{x^2} \int 8x (x^2) dx$$

$$y = \frac{1}{x^2}(2x^4 + c) \Rightarrow y = 2x^2 + \frac{c}{x^2}$$

حل معادله مرتبه اول خطی با فرمول :

نکته : $e^{-2\ln x} = x^{-2}$

$$xy' + 2y = 8x^2$$

حل : $\xrightarrow{\div x} y' + \overset{p}{\frac{2}{x}} y = \overset{q}{8x}$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right] + c$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx} \left[\int 8x \times e^{\int \frac{2}{x}dx} dx \right] + c$$

$$y = e^{-2\ln x} \left[\int 8x \times e^{2\ln x} dx \right] + c$$

$$y = x^{-2} \left[\int 8x \times x^2 dx \right] + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \left[2x^4 + c \right]$$

حالت های خاص (معادلات خطی)

الف) معادلاتی که نسبت به x خطی هستند.

$$x' + f(y)x = r(y)$$

ب) معادله دیفرانسیل برنولی

$$y' + f(x)y = r(x)y^n$$

تغییر متغیر $Z = y^{1-n}$ معادله برنولی را به خطی تبدیل می کند.

$$Z' = (1-n)y^{-n}y'$$

نسبت به Z خطی است

$$Z' + (1-n)f(x)Z = (1-n)r(x)$$

مثال:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3y^4$$

حل) $n = 4$ و $Z = y^{1-n} = y^{-3}$ و $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = x^3$ پس:

$$Z = y^{(1-n)} = e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[\int e^{\int(1-n)p(x)dx} \cdot (1-n)q(x)dx + c\right]$$

بنابراین

$$y^{-3} = e^{-\int(-3)\frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int(-3)\frac{1}{x}dx} \cdot (-3)x^3dx + c\right]$$

$$y^{-3} = e^{3\ln x}\left[\int e^{-3\ln x} \cdot (-3x^3)\,dx + c\right]$$

$$y^{-3} = x^3\left[\int x^{-3} \cdot (-3x^3)\,dx + c\right]$$

$$y^{-3} = x^3\left[\int -3\,dx + c\right]$$

$$y^{-3} = x^3(-3x + c)$$

$$y^{-3} = -3x^4 + cx^3 \rightarrow$$ جواب عمومی

توضیح کامل معادله برنولی: معادله دیفرانسیل برنولی را می توان با تغییر متغیر $Z = y^{1-n}$ حل کرد فرض کنید:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

با ضرب طرفین در y^{-n} داریم:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

که اگر $Z = y^{1-n}$ آنگاه:

$$y' y^{-n} = \frac{1}{1-n} Z' \quad , \quad Z' = (1-n)\, y^{-n} y'$$

و با جایگذاری داریم:

$$\frac{1}{1-n} Z' + p(x) Z = q(x)$$

و یا

$$Z' + (1-n)\, p(x)\, Z = (1-n)\, q(x)$$

که مرتبه اول خطی است پس دارای جواب زیر است:

$$Z = y^{1-n} = e^{-\int (1-n)\, p(x)\, dx} \left[\int e^{\int (1-n)\, p(x)\, dx} \cdot (1-n)\, q(x)\, dx + c \right]$$

مثال ۲

$$y' + \frac{1}{x} y = y^{-2} \cos x$$

حل

$$q(x) = \cos x \quad , \quad p(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad 1-n = 3 \quad , \quad n = -2$$

بنابراین

$$y^{3} = e^{-\int (3) \frac{1}{x} dx} \left[\int e^{\int (3) \frac{1}{x} dx} \cdot (3) \cos x\, dx + c \right]$$

$$y^{3} = e^{-3 \ln x} \left[\int e^{3 \ln x} \cdot (3 \cos x)\, dx + c \right]$$

$$\Rightarrow y^{3} = x^{-3} \left[3 \int x^{3} \cos x\, dx + c \right]$$

$$\Rightarrow y^{3} = x^{-3} \left(3 \left(x^{3} \sin x + 3x^{2} \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x \right) + c \right)$$

$$\Rightarrow y^{3} = x^{-3} \left(3x^{3} \sin x + 9x^{2} \cos x - 18x \sin x - 18 \cos x + c \right)$$

جواب عمومی.

تمرین

$$y' + \frac{1}{x} y = x^{3} y^{3}$$

(حل معادله برنولی)

معادله ریکاتی :

$$y' + f(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

معادله ریکاتی بدون معلوم بودن یک جواب خصوصی قابل حل نیست فرض می‌کنیم $y_1(x)$ جواب خصوصی معادله ریکاتی باشد. تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{z}$ معادله ریکاتی را به خطی تبدیل می‌کند

مثال: معادله ریکاتی $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ را با ($y_1 = -x^2$) حل کنید؟

حل: چون $f(x) = x^3$ و $g(x) = \frac{2}{x}$ و $r(x) = -\frac{1}{x}$ پس

$$u' + \left[\frac{2}{x} + 2\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot(-x^2)\right]u = \frac{1}{x}$$

$$u' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)u = \frac{1}{x}$$

بنابراین $p(x) = -\frac{2}{x} + 2x$ و $q(x) = \frac{1}{x}$ پس:

$$u = e^{-\int\left(\frac{2}{x}+2x\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{2}{x}+2x\right)dx}\frac{1}{x}dx + c\right]$$

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)}\left[\int e^{2\ln x + x^2}\frac{1}{x}dx + c\right]$$

$$u = e^{-2\ln x}e^{-x^2}\left[\int e^{2\ln x}\cdot e^{x^2}\frac{1}{x}dx + c\right]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}\left[\int x^2\cdot e^{x^2}\frac{1}{x}dx + c\right]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}\left[\int x e^{x^2}dx + c\right]$$

$$u = x^{-2}\cdot e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right)$$

$$u = \frac{1}{2}x^{-2} + c x^{-2}e^{-x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2e^{x^2}} = \frac{e^{x^2}+2c}{2x^2e^{x^2}}$$

چون $y = y_1 + \frac{1}{u}$ بود $y = -x^2 + \frac{1}{u}$ پس:

$$y = -x^2 + \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2c}$$

جواب عمومی معادله ریکاتی

(فصل دوم)

معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ :

فرم کلی معادله خطی مرتبه دوم بصورت زیر است : $F(x, y, y', y'') = 0$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

درصورتیکه $r(x) = 0$ باشد معادله را همگن می نامند.

نکته : هر معادله‌ی مرتبه دوم همگن دارای دو جواب مستقل خطی است. اگر y_1 و y_2 جواب های معادله‌ی همگن باشند آنگاه $y_g(x) = c_1y_1 + c_2y_2$ فرم جواب عمومی معادله همگن است.

مثال :

$$y'' + y = 0$$

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$$

جواب عمومی معادله همگن فوق

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

قضیه : اگر y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد آنگاه $y = c_1y_1 + c_2y_2$ نیز یک جواب معادله همگن است.

قضیه : اگر y_g جواب معادله همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد و y_p جواب معادله غیرهمگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ باشد آنگاه $y_g + y_p$ یک جواب معادله غیرهمگن است.

نتیجه : جواب معادله‌ی مرتبه دوم همگن به صورت ترکیب خطی دو جواب مستقل آن است ولی برای حل معادله‌ی غیرهمگن علاوه بر اینکه جواب عمومی معادله همگن نیاز است باید یک جواب خصوصی از آن را نیز محاسبه کنیم.

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت :

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad p, q \in R$$

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

$$y''+py'+qy=0 \qquad p,q\in\mathbb{R}$$

فقط تابع نمایی دارای این خاصیت است که مشتقات آن مضاربی از خودش باشد. جواب باید به فرم

$$y=e^{tx} \qquad t=?$$

$$y'=te^{tx} \qquad y''=t^2e^{tx} \xrightarrow{\text{با جایگذاری}} t^2e^{tx}+pte^{tx}+qe^{tx}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{tx}}_{\neq 0}(t^2+pt+q)=0 \Rightarrow t^2+pt+q=0$$

معادله مشخصه

۳ حالت وجود دارد.

الف) اگر $\Delta>0$ معادله دارای دو ریشه حقیقی t_1 و t_2 است.

$$y_1=e^{t_1x}\ ,\ y_2=e^{t_2x}$$

$$\boxed{y_g(x)=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}}$$

جواب عمومی

مثال:

$$y''+3y'-4y=0$$

حل)

$$(t^2+3t-4)=0 \Rightarrow (t+4)(t-1)=0 \Rightarrow t_1=-4,\ t_2=1$$

$$y_1=e^{-4x}\ ,\ y_2=e^{x} \Rightarrow y_g=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}$$

جواب عمومی

ب) اگر $\Delta=0$ معادله یک ریشه حقیقی دارد.

$$t_1=t_2=t$$

$$y_1=e^{tx}\ ,\ y_2=xe^{tx} \Rightarrow y_g=c_1e^{tx}+c_2xe^{tx}$$

مثال:

$$y''-4y'+4y=0$$

حل)

$$t^2-4t+4=0 \Rightarrow (t-2)^2=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} t=2 \qquad y_1=e^{2x} \qquad y_2=xe^{2x} \Rightarrow y_g=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

ج) اگر $\Delta<0$ معادله ریشه مختلط دارد.

$$t=a\pm ib$$

$$y_1=e^{(a+ib)x}\ ,\ y_2=e^{(a-ib)x}$$

$$y_g=c_1e^{(a+ib)x}+c_2e^{(a-ib)x}$$

$$e^{\alpha i}=e^{ax}(c_1e^{ibx}+c_2e^{-ibx})$$

نتیجه: می‌توانیم توابع مستقل را در این حالت در نظر بگیریم:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx \quad , \quad y_2 = e^{ax}\sin bx$$

مثال: $y''-4y'+5y=0$

حل) $t^2-4t+5=0 \qquad \Delta = 16-20=-4<0$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} \xrightarrow{i^2=-1} t=\frac{4\pm 2i}{2} = \underset{a}{2} \pm \underset{b}{i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{2x}\cos x \\ y_2 = e^{2x}\sin x \end{cases} \Longrightarrow y_g = e^{2x}(c_1\cos x + c_2 \sin y)$$

مثال:

$y''+2y'-15y=0$

حل: $t^2+2t-15=0 \Rightarrow (t-3)(t+5)=0 \Rightarrow t_1=3 \ , \ t_2=-5$

$$y_1=e^{3x} \ , \ y_2=e^{-5x} \qquad y_g = c_1e^{3x}+c_2e^{-5x}$$

نکته: این روش را می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل همگن خطی از هر مرتبه‌ای به کار برد فقط باید دقت کرد که هر ریشه‌ی معادله به تعداد تکرار آن باید جواب مستقل خطی تولید کند.

مثال: $y'''-2y''-3y'=0$

حل: $t^3-2t^2-3t=0 \Rightarrow t(t^2-2t-3)=0$

$$\Rightarrow t(t-3)(t+1)=0 \Rightarrow t_1=0 \ , \ t_2=3 \ , \ t_3=-1$$

$$y_1=e^{-x}=1 \qquad y_2=e^{3x} \qquad y_3=e^{-3x}$$

$$y_g = c_1 + c_2e^{3x}+c_3e^{-3x}$$

معادله مرتبه دوم غیرهمگن:

می‌دانیم که جواب معادله غیرهمگن بصورت $y(x)=y_p(x)+y_g(x)$ است که در آن $y_g(x)$ جواب معادله همگن متناظر می‌باشد و $y_p(x)$ هم یک جواب خصوصی از معادله غیرهمگن است برای محاسبه $y_p(x)$ دو روش را بررسی خواهیم کرد: ① روش ضرایب نامعین ② روش تغییر پارامتر

۱) روش ضرایب نامعین :

در بعضی از حالت ها جواب خصوصی معادله ی غیرهمگن شبیه تابع سمت راست است درحالی که $r(x)$ به صورت چندجمله ای - سینوس کسینوس - نمایی ویا ترکیبی از آنها باشد مطابق جدول زیر y_p هم فرمی شبیه $r(x)$ خواهد داشت .

$r(x)$	$y_p(x)$
۱) $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$	$x^m (A_k x^k + \cdots + A_1 x + A_0)$ A_0 تا $A_k \ldots$ ضرایب مجهول هستند m تعداد ریشه های مساوی صفر در معادله است.
۲) e^{ax} (یک چندجمله ای درجه K)	$x^m e^{ax}$ (یک چندجمله ای درجه K با ضرایب مجهول)

۳) $r(x)$

$$\begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ \text{درجه } k_1\end{pmatrix} \cos bx + \begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ \text{درجه } k_2\end{pmatrix} \sin bx$$

$y_p(x)$

$$x^m \left[\begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ \text{درجه } S\end{pmatrix} \cos bx + \begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ \text{درجه } S\end{pmatrix} \sin bx \right]$$

S ماکزیمم k_1 و k_2 و m تعداد ریشه های ib در معادله است.

۴) $r(x)$

$$e^{ax} \left[\begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ k_1\end{pmatrix} \cos bx + \begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ k_2\end{pmatrix} \sin bx \right]$$

$y_p(x)$

$$x^m e^{ax} \left[\begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ \text{درجه } S\end{pmatrix} \cos bx + \begin{pmatrix}\text{چندجمله ای}\\ \text{درجه } S\end{pmatrix} \sin bx \right]$$

S ماکزیمم k_1 و k_2 و m تعداد ریشه ها $a + ib$ در معادله است.

مثال :

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x}$$

اول معادله همگن را حل می کنیم

حل :

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\Longrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \qquad (t-1)(t-2) = 0$$

$$t_1 = 1 \to e^x \qquad t_2 = 2 \to e^{2x}$$

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$ جواب معادله همگن

چندجمله ای درجه ۰

$$r(x) = 3 e^{4x} \qquad a = 4$$

$$y_p = x^0 \quad e^{4(x)}A = Ae^{4x}$$

برای پیدا کردن A در معادله ① جایگذاری می‌کنیم

$$y_p = Ae^{4x} \quad y'_p = 4Ae^{4x} \quad y''_p = 16Ae^{4x}$$

$$\Rightarrow 16Ae^{4x} - 12Ae^{4x} + 2Ae^{4x} = 3e^{4x}$$

$$6A\cancel{e^{4x}} = 3\cancel{e^{4x}} \Rightarrow A = 1/2$$

$$y_p = 1/2\, e^{4x}$$ جواب خصوصی معادله غیرهمگن

فرم کلی جواب معادله غیرهمگن

$$y(x) = y_p + y_g = 1/2\, e^{4x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

نکته: این روش را می‌توان برای حل معادلات مراتب بالاتر نیز بکار برد.

نکته: اگر تابع سمت راست به صورت مجموعی از چند تابع باشد.

$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + \dots + r_k(x)$ که هر کدام فرم یکی از حالت‌های چهارگانه را داشته باشند در این صورت مسئله را به صورت جداگانه با هر یک از توابع سمت راست حل می‌کنیم و جواب معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$y(x) = y_g + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{pk}(x)$$

تعریف رونسکین: $W(y_1, y_2)$ دو تابع y_1 و y_2 بصورت زیر تعریف می‌شوند

Wronskian

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

مثال:

$$W(x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$$

همانطور که می‌دانیم توابع e^{ax} و e^{bx} ؛ $(a \neq b)$ مستقل خطی هستند. اینک استقلال خطی آنها را با استفاده از روش دیگری که اهمیت خاصی دارد ثابت می‌کنیم برای این منظور ترکیب خطی آنها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

داریم:

$$(1) \quad c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} = 0$$

از این معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم بدست می‌آوریم:

$$c_1 a e^{ax} + c_2 b e^{bx} = 0 \qquad (2)$$

در نتیجه معادلات (۱) و (۲) به ازای هر x برقرار می‌باشند.

$$\begin{cases} c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} = 0 \\ c_1 a e^{ax} + c_2 b e^{bx} = 0 \end{cases}$$

اگر c_1 و c_2 هردو همزمان صفر نباشند دترمینان ضرایب

$$\begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ a e^{ax} & b e^{bx} \end{vmatrix}$$

یعنی باید به ازای هر x برابر صفر باشد. چون مقدار این دترمینان برابر با $e^{(a+b)x}\,(b-a)$ است و چون $a \neq b$ پس مقدار دترمینان هرگز صفر نیست. در نتیجه c_1 و c_2 هردو صفر هستند و بنابراین توابع مستقل خطی می‌باشند.

مثال: نشان دهید توابع $f_1(x) = e^{r_1 x}$ ، $f_2(x) = e^{r_2 x}$ و $f_3(x) = e^{r_3 x}$ که $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ مستقل خطی می‌باشند.

حل) رونسکین توابع داده شده را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & e^{r_3 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & r_3 e^{r_3 x} \\ r_1^2 e^{r_1 x} & r_2^2 e^{r_2 x} & r_3^2 e^{r_3 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + r_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}$$

با ساده کردن دترمینان بدست می‌آوریم:

$$W(x) = e^{(r_1 + r_2 + r_3)x}\,(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)$$

چون $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ پس $W(x) \neq 0$ ، درنتیجه توابع نمایی داده شده مستقل خطی می‌باشند.

نکته: فرض کنید توابع y_1 و y_2 جواب‌های از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ بر بازه‌ی I بوده و a_2 بر I هرگز صفر نشود. رونسکین y_1 و y_2 یعنی W در معادله دیفرانسیل $a_2 W' + a_1 W = 0$ صدق می‌کند و از این معادله نتیجه می‌گیریم که

$$W = c\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

این فرمول به فرمول آبل معروف است. (از فرمول آبل نتیجه می‌شود که رونسکین دو جواب بر بازه I متحد صفر است یا هرگز صفر نیست)

قضیه: رونسکین دو تابع مستقل خطی مخالف صفر است.

نتیجه: اگر دو تابع وابسته خطی باشند آنگاه رونسکین آنها متحد با صفر است و بالعکس تحت شرایطی برقرار است.
بنابراین اگر رونسکین در هیچ نقطه صفر نشود، آنگاه توابع مستقل خطی هستند.

روش تغییر پارامتر برای پیدا کردن جواب خصوصی :

فرض کنید y_1 و y_2 جوابهای مستقل خطی معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد برای

پیدا کردن جوابهای خصوصی معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ فرض کنیم

$y_p=u_1y_1+u_2y_2$ که در آن u_1 و u_2 توابع غیر ثابتی از x هستند هدف پیدا کردن u_1 و u_2

است.

معادلات همگن : یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو را همگن گویند اگر درجه همه‌ی جملات آن نسبت به تابع

مجهول و مشتقات آن برابر باشد.

① $yy''=-y'^2$

② $2yy''-3y'^2=4y^2$

همگن

تغییر متغیر زیر معادله‌ی همگن را به مرتبه اول تبدیل می‌کند.

$$y=e^{\int z\,dx} \qquad y'=ze^{\int z\,dx}$$

$$y''=z'e^{\int z\,dx}+z^2e^{\int z\,dx}=(z'+z^2)e^{\int z\,dx}$$

حل معادله همگن مرتبه ۲ با ضرایب ثابت :

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ درصورتی که ضرایب معادله ثابت باشد می‌توان از روش برای

پیدا کردن جواب های مستقل معادله همگن استفاده کرد ولی اگر ضرایب ثابت نباشد هیچ قاعده‌ی کلی

برای پیدا کردن جواب‌های معادله کلی وجود ندارد. در این حالت از روش های محکوم استفاده می‌کنیم.

مثال : یکی از جواب‌های معادلات زیر را حدس بزنید.

$$x^2y''-\underbrace{x(x+2)}_{p(x)}y'+\underbrace{(x+2)}_{q(x)}y=0$$

یکی از جواب‌های

$$p(x)+xq(x)=-x(x+2)+x(x+2)=0 \Rightarrow y_1=x$$

پیدا کردن جواب دوم : فرض کنیم $y_2=uy_1$ که در آن u تابعی غیر ثابت از x است برای تابع

u از معادله پس از دوبار مشتق‌گیری در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$y_2=ux \qquad y_2'=u'x+u$$

$$y_2''=u''x+2u'$$

روش کاهش مرتبه: فرض کنیم y_1 یک جواب خصوصی معادله خطی مرتبه دوم همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد در این صورت y_2 جواب خصوصی دیگر معادله مستقل از y_1 باشد به روش کاهش مرتبه از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx}\, dx$$

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0$ را بدست آورید؟

حل) با توجه به اینکه

$$p(x)+xq(x)=\frac{-x}{x-1}+x\frac{1}{x-1}=0 \quad \text{لذا} \quad y_1=x$$

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}\,e^{\int\frac{x}{x-1}dx}\,dx = x\int\frac{1}{x^2}\,e^{\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx}\,dx$$

$$=x\int\frac{1}{x^2}\,e^{x}e^{\ln(x-1)}\,dx = x\int\left(x^{-1}-x^{-2}\right)e^{x}dx = x\left(x^{-1}e^{x}\right)$$

$$=e^{x} \Rightarrow y_g=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{x}+c_2x$$

نکته: ۱- اگر $p(x)+xq(x)=0$ باشد آنگاه $y_1=x$.

۲- اگر $1+p(x)+q(x)=0$ باشد آنگاه $y_1=e^{x}$.

۳- اگر $1-p(x)+q(x)=0$ " " $y_1=e^{-x}$.

۴- اگر $m^2+mp(x)+q(x)=0$ " " $y_1=e^{mx}$.

مثال ۲:

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$$

حل

$$y''+\underbrace{\frac{-2x}{x^2-1}}_{p(x)}y'+\underbrace{\frac{2}{x^2-1}}_{q(x)}y=0$$

$$p(x)+xq(x)=0 \Rightarrow y_1=x$$

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}\,e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\,dx = x\int\frac{x^2-1}{x^2}dx = x\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=x\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+1$$

۱۲

مثال ۳:

$$xy'' + (1-2x)\,y' + (x-1)\,y = 0$$

حل) $\xrightarrow{\text{تقسیم بر } x}$

$$y'' + \underbrace{\frac{1-2x}{x}}_{p(x)}\,y' + \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{q(x)}\,y = 0$$

چون $1 + p(x) + q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{x}$

$$y_2 = e^{x}\int \frac{1}{e^{2x}}\,e^{-\int \frac{1-2x}{x}dx}\,dx = e^{x}\int \frac{1}{\cancel{e^{2x}}}\,e^{-\ln x}\,\cancel{e^{2x}}\,dx = e^{x}\ln x$$

مثال ۴:

$$xy'' + (1+x)\,y' + y = 0$$

حل

$$y'' + \underbrace{\left(\frac{1}{x}+1\right)}_{p(x)}y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{q(x)}y = 0$$

چون $1 - p(x) + q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

$$y_2 = e^{-x}\int \frac{1}{e^{-2x}}\,e^{-\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx}\,dx = e^{-x}\int \frac{1}{e^{-2x}}\,e^{-\ln x}\,e^{-x}\,dx$$

$$= e^{-x}\int \frac{e^{x}}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 \ln x$$

(معادلات درجه دوم معادلات دیفرانسیل)

مثال: معادله فاقد y ، $xy'' = y'$ را با تغییر متغیر $y' = p$ حل می‌کنیم با جایگذاری $y'' = \frac{dp}{dx}$ داریم:

$$x\,\frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c_1 \Rightarrow \ln p = \ln c_1 x \Rightarrow p = c_1 x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 x \Rightarrow \int dy = \int c_1 x\,dx \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}c_1 x^2 + c_2$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

مثال: معادله مرتبه دوم فاقد x ، $yy'' = (y')^2$ را با تغییر متغیر $y' = p$ حل می‌کنیم که با جایگذاری $y'' = p\,\frac{dp}{dy}$ داریم:

$$yp\frac{dp}{dy}=p^2 \Rightarrow ydp=pdy$$

$$\Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p=\ln y+\ln c_1 \Rightarrow p=c_1y \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=c_1y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int c_1dx \Rightarrow \ln y=c_1x+c \Rightarrow$$

$$y=e^{c_1x+c}=e^{c_1x}\cdot e^{c} \Rightarrow y=c_2e^{x}$$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

تذکر: در حل این نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در واقع هر معادله مرتبه دوم را به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرده و آنها را حل می‌کنیم این روش را کاهش مرتبه می‌گویند.

حالات خاص حل معادلات مرتبه دوم (حالات خاص فاقد y یا x):

(۱) معادله به صورت $f(y, y', y'')=0$ را مرتبه دوم فاقد x می‌نامیم. مثلاً

$y''+y=0$ و $yy''=(y')^2$ معادلات مرتبه دوم فاقد x می‌باشند. ممکن است در معادله مرتبه دوم ضریب y برابر صفر باشد.

(۲) معادله به صورت $f(x, y', y'')=0$ را مرتبه دوم فاقد y می‌نامیم. مثلاً

$xy''-y'=3x^2$ و $xy''=y'$ معادلات مرتبه دوم فاقد y می‌باشند.

معادله دیفرانسیل کشی - اویلر (cauchy - Euler):

معادله مرتبه دوم همگن $x^2y''+axy'+by=0$ را که در آن a و b اعداد ثابت اند معادله کشی اویلر مرتبه دوم می‌نامیم. به عبارت دیگر هر معادله دیفرانسیل که توان x و مرتبه مشتق y یکسان باشند.

مثال: معادله کوشی - اویلر $x^2y''-4xy'+6y=0$ را حل کنید؟

معادله $D^2+aD+b=0$ را معادله کمکی می‌نامیم که در آن $D=\frac{d}{dx}$ و $Dy=\frac{dy}{dx}=y'$

$y''=D^2y=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ معادله کمکی یک معادله درجه دوم می‌باشد که ممکن است به حالت‌های مختلف رخ دهد. الف) دارای دو ریشه متمایز باشد یعنی $D^2+aD+b=0=(D-m_1)(D-m_2)=0$

ب) دارای ریشه مضاعف (تکراری) باشد یعنی $D^2+aD+b=(D-m)(D-m)=0$

ج) دارای ریشه مختلط باشد یعنی

$$D^2+aD+b=(D-(\alpha+i\beta))(D-(\alpha-i\beta))=0$$

حل) با فرض $X=e^t$ داریم:

$$D(D-1)Y-4DY+6Y=0$$

$$(D^2-D-4D+6)Y=0 \Rightarrow (D^2-5D+6Y)=0$$

پس معادله کمکی $D^2-5D+6=0$ دارای ریشه‌های $D=2,3$ است بنابراین

$Y=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$ با جایگذاری $X=e^t$ (یا $t=\ln x$) نتیجه می‌شود

$y=c_1x^2+c_2x^3$ جواب معادله کشی-اویلر

روش راحت:

حل $\quad x^2y'' \longrightarrow y''-y' \qquad xy' \rightarrow y'$

$$x^2y''-4xy'+6y=0$$

$$(y''-y')-4y'+6y=0 \Rightarrow y''-5y'+6y=0$$

$$\underline{b}\quad \lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=2,3 \qquad (\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

با جایگذاری $u=\ln x$

$$y_g=c_1e^{2u}+c_2e^{3u}$$

$$\Rightarrow y_g=c_1e^{2\ln x}+c_2e^{3\ln x}=c_1x^2+c_2x^3$$

مثال ۲: معادله کوشی-اویلر $x^2y''+xy'+y=0$ را حل کنید؟

حل $\quad (y''-y')+y'+y=0 \Rightarrow y''+y=0$

$$\Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i \quad < \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{matrix}$$

$$y_g=c_1e^{0u}\cos(u)+c_2e^{0u}\sin(u)$$

$u=\ln x$

$$y_g=c_1\cos(u)+c_2\sin(u)$$

$$y_g=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$$

مثال ۳:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

حل

$$(y''-y') - 3y' + 4y = 0 \Rightarrow y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$ ریشه مضاعف

$$y = c_1 e^{2u} + c_2 u e^{2u} \rightarrow u = \ln x$$ با جایگذاری

$$y = c_1 e^{2\ln x} + c_2 \ln x \, e^{2\ln x} \Rightarrow y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

$$y = x^2 (c_1 + c_2 \ln x)$$

«فصل سوم» حل معادله دیفرانسیل به روش سریها

سری توانی

سری به صورت

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ یا $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$ که در آن

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ و x_0 اعداد ثابتی بوده و x متغیر است را سری توانی به مرکز x_0 نامیم.

سری توانی ممکن است که در یکی از ۳ حالت زیر صدق کند:

۱ـ تنها به ازای $x = x_0$ همگرا باشد.

۲ـ به ازای هر x در یک همسایگی x_0 مطلقاً همگرا باشد یعنی برای $|x-x_0| < R$ همگرا و برای $|x-x_0| > R$ واگرا باشد، عدد R را شعاع همگرایی سری نامیم.

۳ـ به ازای هر x مطلقاً همگرا باشد.

مجموعه مقادیر x را که سری توانی همگرا است، بازه (فاصله) همگرایی سری می نامیم.

تذکر: اگر سری به ازای $x = x_0 \pm R$ همگرا باشد آنگاه بازه همگرایی برابر است با $x_0 - R \le x \le x_0 + R$ و شعاع همگرایی عبارت است از:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ممکن است $R = \infty$ اگر حد بالا نامتناهی باشد.

مثال : بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0} n!\,x^n$ را پیدا کنید.

جوره

حل)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

بنابراین سری تنها به ازای $x=0$ همگرا است.

مثال : بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n!}$ را پیدا کنید.

جوره

حل)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| = +\infty$$

پس سری روی مجموعه اعداد حقیقی ، یعنی درهرجا همگرا است.

مثال : بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(x-2)^n$ را پیدا کنید.

جوره

حل)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right| = 1$$

پس سری روی مجموعه x هایی که $|x-2|<1$ همگرا است.

تعریف : سری

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

را بسط سری تیلور $f(x)$ ، حول نقطه x_0 و سری

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

را بسط مک لورن $f(x)$ حول نقطه صفر می‌نامیم.

تعریف : اگر سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

به ازای هر x در بازه $(x_0-R\,,\,x_0+R)$ به $f(x)$ همگرا باشد می‌گوییم f در نقطه x_0 تحلیلی است.

مثال: بسط سری مک لورن برخی توابع عبارت است از:

الف) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ که $|x|<\infty$

ب) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ که $|x|<\infty$

ج) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ که $|x|<\infty$

د) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ که $|x|<1$

هـ) $\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ که $|x|<\infty$

و) $\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ که $|x|<\infty$

نقاط معمولی و منفرد و جواب‌های سری معادلات دیفرانسیل:

تعریف: نقطه x_0 را یک نقطه معمولی (عادی) برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_1(x)y'+f_0(x)y=g(x)$$

می‌گوییم هرگاه ضرایب $f_i(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. نقطه‌ای را که معمولی نباشد نقطه منفرد (غیرعادی) معادله می‌نامیم.

مثال: نقاط منفرد معادله دیفرانسیل $x^3(x^2-1)y''+x(x+1)y'+(x-1)y=0$ را پیدا کنید.

حل) ضریب بالاترین مشتق معادله را با تقسیم بر $x^3(x^2-1)$ برابر یک می‌کنیم

یعنی $$y''+\frac{1}{x^2(x-1)}y'+\frac{1}{x^3(x+1)}y=0$$

بدیهی است که همه ضرایب این معادله در همه نقاط بجز نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ تحلیلی می‌باشند. پس نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ نقاط منفرد و همه نقاط دیگر نقاط معمولی معادله هستند.

تبدیلات لاپلاس: (فصل چهارم)

عملگری است که بر روی مجموعه توابع تعریف می شود و به هر تابع یک تابع جدید را نسبت می دهد.

$$f(t) \xrightarrow{L \text{ لاپلاس}} F(s)$$

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s) \qquad s>0$$

شرط اینکه تبدیل لاپلاس $F(t)$ وجود داشته باشد آن است که انتگرال ناسره (نامتناهی) همگرا باشد.

مثال:

$$f(t) = 1$$

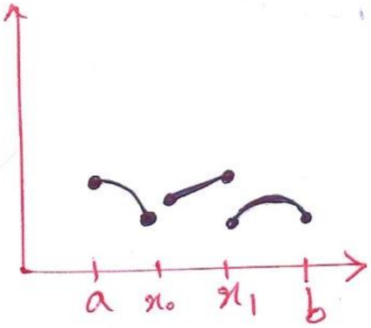
حل) $$L\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

نکته: تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد.

$$L\{cf+g\} = cL\{f\} + L\{g\}$$

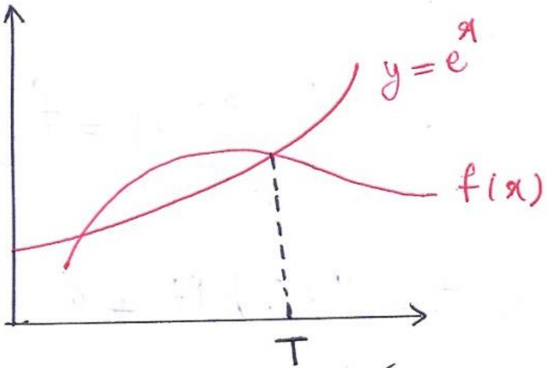
چون تبدیل لاپلاس در انتگرال می باشد و خاصیت خطی برای انتگرال ها برقرار است پس برای تبدیل لاپلاس هم برقرار است.

تعریف: تابع $f(x)$ را بر بازه $[a,b]$ قطعه ای پیوسته گویند اگر f بر $[a,b]$ به جز در تعداد متناهی نقطه پیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی دارای حد چپ و راست باشد.



تعریف: تابع $f(x)$ را هم مرتبه نمایی با e^{ax} می نامند اگر اعداد ثابت M و T چنان وجود داشته باشند که

$$\forall x \geq T : |f(x)| \leq Me^{ax}$$



قضیه: (شرط وجود تبدیل لاپلاس): اگر $f(x)$ در بازه‌ی $[0,T]$ قطعه‌ای پیوسته و بر $(T,+\infty)$ هم‌مرتبه نمایی با یک تابع نمایی مانند e^{ax} باشد آنگاه تبدیل لاپلاس آن برای هر $s>a$ وجود دارد.

$$L\{e^{ax}\} = \int_0^{+\infty} e^{ax} e^{-sx}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)x} dx$$

$$= \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

مثال:

$$L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2} \qquad L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$$

$f(t)$	$F(s)$
t^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
t^{n}	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

نکته: تبدیل لاپلاس معکوس پذیر است و معکوس آن نیز خاصیت خطی دارد.

$$L\{f(t)\} = F(s) \longrightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

با معلوم بودن $F(s)$ می‌توان $f(t)$ را محاسبه کرد.

مثال:

$$f(t) = 4e^{3t} + 2\cos t - 3\sinh 2t + 5$$

حل)
$$L\{f\} = 4\,L\{e^{3t}\} + 2\,L\{\cos t\} - 3\,L\{\sinh 2t\} + 5\,L\{1\}$$

$$= \frac{4}{s-3} + 2\,\frac{s}{s^2+1} - 3\,\frac{2}{s^2-4} + 5\,\frac{1}{s}$$

مثال:

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}$$

حل)
$$\frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)} = \frac{s^2+1}{s(s^2+1)} + \frac{s}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{1+\sin t\}$$

قضیه: تبدیل لاپلاس دارای خواص زیر است:

(۱) $L\{f'(t)\} = s\,L\{f(t)\} - f(0)$ اگر f بر $[0, +\infty)$ پیوسته باشد

(۲) $L\left\{\int_0^t f(v)\,dv\right\} = \frac{1}{s}\,L\{f(t)\}$

(۳) $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

(۴) $\frac{d^n}{ds^n} F(s) = L\{(-t)^n f(t)\}$

(۵) $\int_s^{+\infty} F(u)\,du = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$

فصل ششم

انتگرال

۴۷.۰.۶ انتگرال نامعین

تعریف ۲۸۰.۰.۶. هرگاه توابع $f(x)$ و $F(x)$ بر بازه‌ی I طوری تعریف شده باشند که به ازای هر x داشته باشیم

$$f(x) = F'(x)$$

آنگاه $F(x)$ را یک تابع اولیه (ضد مشتق) $f(x)$ در فاصله I می‌نامیم.

نکته ۲۸۱.۰.۶. به جای تابع اولیه می‌گوییم **یک** تابع اولیه زیرا رابطه زیر نشان می‌دهد اگر $F(X)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد در این صورت $F(x) + c$ که در آن c مقدار ثابتی است نیز یک تابع اولیه $f(x)$ می‌باشد.

$$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$$

به عبارت دیگر تفاوت در تابع اولیه $f(x)$ مانند $F_1(x), F_2(x)$ مقداری است ثابت.

تعریف ۲۸۲.۰.۶. اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد آن را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ می‌گوییم و با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت.

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

نماد $\int$ را علامت انتگرال و عبارت $f(x)dx$ را عبارت زیر انتگرال می‌نامیم.

قضیه ۲۸۳.۰.۶. *اگر $n \neq -۱$، آنگاه:*

$$\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱} x^{n+۱} + c$$

و در حالت کلی داریم:

$$\int f'(x) f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+۱}}{n+۱} + c.$$

مثال ۲۸۴.۰.۶. ۱)

$$\int x^۲ dx = \frac{۱}{۳} x^۳ + c$$

۲)

$$\int ۷x dx = ۷ \int x dx = \frac{۷}{۲} x^۲ + c$$

۳)

$$\int -۵x^۲ dx = -۵ \int x^۲ dx = -۵ \times \frac{۱}{۳} x^۳ + c = \frac{-۵}{۳} x^۳ + c$$

۴)

$$\int \frac{۱}{\sqrt[۵]{x^۲}} dx = \int x^{\frac{-۲}{۵}} dx = \frac{-۱}{\frac{-۲}{۵}+۱} x^{\frac{-۲}{۵}+۱} + c = \frac{۵}{۳} x^{\frac{۳}{۵}} + c$$

۴۸.۰.۶ روابط پر کاربرد انتگرال

با استفاده از تعریف انتگرال نامعین معلوم می‌شود که هر دستور مشتق‌گیری می‌تواند رابطه‌ای برای به دست آوردن تابع اولیه نیز باشد. لذا:

قضیه ۲۸۵.۰.۶. *روابط زیر برقرار است.*

۱)

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + c$$

۲)

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + c$$

۳)

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$$

۴)

$$\int -\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\arcsin\frac{u}{a} + c = \arccos\frac{u}{a} + c$$

۵)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

۶)

$$\int (1 + \tan^2 u)du = \tan u + c$$

۷)

$$\int (1 + \cot^2 u)du = -\cot u + c$$

۸)

$$\int \frac{du}{u} = \ln \mid u \mid + c$$

۹)

$$\int e^{ku} du = \frac{۱}{k} e^{ku} + c$$

۹)

$$\int a^{ku} du = \frac{a^{ku}}{k \times \ln a} + c$$

با استفاده از فرمول‌های فوق داریم:

مثال ۶.۰.۲۸۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱)

$$\int \cos ۳x dx$$

پاسخ ۶.۰.۲۸۷.

$$\int \cos ۳x dx = \frac{۱}{۳} \sin ۳x + c$$

۲)

$$\int \sin \frac{x}{۳} dx$$

پاسخ ۶.۰.۲۸۸.

$$\int \sin \frac{x}{۳} dx = -۳ \cos \frac{x}{۳} + c$$

۳)

$$\int \frac{dx}{۹ + x^{۲}}$$

پاسخ ۶.۰.۲۸۹.

$$\int \frac{dx}{۹+x^۲} = \frac{۱}{۳} \arctan \frac{x}{۳} + c$$

۶.۰.۴۹ انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر

می‌خواهیم مقدار $\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx$ را محاسبه نماییم و می‌دانیم تابع اولیه $f\left(g(x)\right)$ موجود است اما مستقیما نمی‌توان آن را حساب کرد. برای محاسبه آن، تابع را به صورت ساده‌تر تغییر شکل می‌دهیم و تابع اولیه این صورت ساده را محاسبه می‌کنیم.

با فرض $t = g(x)$ که در آن t یک متغیر جدید و g تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است خواهیم داشت. $dt = g'(x)dx$

در نتیجه:

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + c$$

مثال ۶.۰.۲۹۰. $\int ۲x\sqrt[۳]{۳+x^۲}dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۶.۰.۲۹۱. متغیر $u = ۳ + x^۲$ را در نظر می‌گیریم داریم:

$$۲xdx = du$$

یا

$$xdx = \frac{۱}{۲}du$$

پس:

$$\int ۲x\sqrt[۳]{۳+x^۲}dx = \int u^{\frac{۱}{۳}}du = \frac{۳}{۴}u^{\frac{۴}{۳}} + c = \frac{۳}{۴}(۳+x^۲)^{\frac{۴}{۳}} + c$$

مثال ۶.۰.۲۹۲. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{x+5}$$

پاسخ ۶.۰.۲۹۳.

$$\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{du}{u} = \ln \mid u \mid +c = \ln \mid x+5 \mid +c$$

$$x+5 = u \quad \Longrightarrow \quad dx = du$$

مثال ۶.۰.۲۹۴. $\int \tan^n \theta \sec^2 \theta d\theta$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۶.۰.۲۹۵. تغییر متغیر $\tan\theta = u$ را در نظر می‌گیریم، داریم

$$\left(1+\tan^2\theta\right) d\theta = du$$

یا

$$\sec^2\theta d\theta = du$$

پس

$$\int \tan^n \theta \sec^2 \theta d\theta = \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1}\theta + c$$

۶.۰.۰۵ انتگرال به روش جزء به جزء

می‌دانیم اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر در بازه I باشند در این بازه داریم:

$$d(uv) = udv + vdu \quad \Longrightarrow \quad udv = d(uv) - vdu$$

با انتگرال‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \quad \Longrightarrow \quad \int udv = uv - \int vdu$$

مثال ۶.۰.۲۹۶. $\int x\sin xdx$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۶.۰.۲۹۷. عبارت $x\sin xdx$ را در نظر می‌گیریم، باید قسمتی از آن را u و بقیه را dv انتخاب کنیم، قرار می‌دهیم:

$$dv = \sin xdx \quad , \quad u = x$$

بنابراین $du = dx$ و $v = \int \sin xdx = -\cos x$ با استفاده از دستور جزء به جزء داریم:

$$\int x\sin xdx = -x\cos x - \int -\cos xdx = -x\cos x + \sin x + c$$

مثال ۶.۰.۲۹۸. $\int x^۲ \ln xdx$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۶.۰.۲۹۹. قرار می‌دهیم:

$$dv = x^۲dx \quad , \quad u = \ln x$$

پس:

$$v = \int x^۲dx = \frac{۱}{۳}x^۳ \quad , \quad du = \frac{۱}{x}dx$$

به نا به دستور جزء به جزء داریم:

$$\frac{x^۳}{۳}\ln x - \int \frac{x^۳}{۳}.\frac{dx}{x} = \frac{x^۳}{۳}\ln x - \frac{۱}{۳}\int x^۲dx = \frac{x^۳}{۳}\ln x - \frac{۱}{۹}x^۳ + c$$

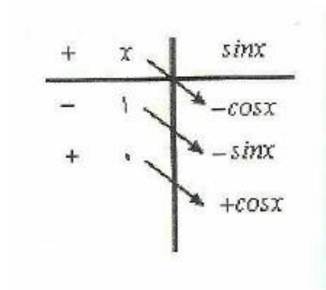
۵۱.۰.۶ انتگرال‌گیری به روش جدول انتگرالی

هرگاه عبارت زیر انتگرال حاصلضرب دو تابع باشد که یکی از توابع با گرفتن تعدا متناهی مشتق به صفر برسد و تابع دیگری به راحتی قابل انتگرال‌گیری متوالی باشد از روش جدول انتگرالی استفاده می‌نماییم. بدین صورت که در این جدول دو ستون تشکیل می دهیم و در یکی از ستون‌ها مشتقات متوالی تابع را می‌نویسم و در ستون دوم انتگرال های متوالی تابع دیگر را می‌نویسیم سپس به صورت اریب توابع حاصل را در هم ضرب نموده و به طور یک در میان علامت را در منفی ضرب می‌نماییم.

مثال ۳۰۰.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x\sin x dx$$

پاسخ ۳۰۱.۰.۶.



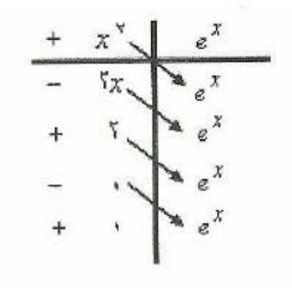
$$\int x\sin x dx = +x\times(-\cos x) - 1\times(-\sin x) + 0\times\cos x$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

مثال ۶.۰.۳۰۲. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x^2 e^x dx$$

پاسخ ۶.۰.۳۰۳.



$$\int x^2 e^x dx = +x^2 \times e^x - 2x \times e^x + 2e^x - 0e^x$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

تعریف ۶.۰.۳۰۴. تابع لگاریتم طبیعی $y = \ln x$،

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad , \quad x > 0$$

۶.۰.۵۲ انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی

برای محاسبه انتگرال‌های توابع مثلثاتی آن‌ها را به حالت‌های زیر تقسیم می‌کنیم.

حالت اول: محاسبه انتگرال‌های $\int \sin^n x dx$ یا $\int \cos^n x dx$ در صورتی که n عدد صحیح فرد باشد ($n = 2k + 1$) در این حالت تعداد عامل با توان زوج تابع مورد نظر را جدا کرده و فقط یک عامل با توان

یک را باقی می‌گذاریم سپس طبق روش زیر تابع با توان زوج را تبدیل به نسبت مثلثاتی دیگر می‌کنیم.

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{۲k} x \sin x dx = \int (۱ - \cos^۲ x)^k . \sin x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{۲k} x \cos x dx = \int (۱ - \sin^۲ x)^k . \cos x dx$$

مثال ۶.۰.۳۰۵. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin^۳ x dx$$

پاسخ ۶.۰.۳۰۶. پس $n = ۳$ می‌باشد لذا $۲k = ۲$ را طبق روش زیر جدا می‌نامیم.

$$\begin{aligned}\int \sin^۳ x dx &= \int \sin^۲ x \sin x dx \\ &= \int (۱ - \cos^۲ x) \sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^۲ x \sin x dx \\ &= -\cos x - \int \cos^۲ x \sin x dx\end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\cos x = u$ برای انتگرال باقیمانده خواهیم داشت:

$$\cos x = u \quad \Longrightarrow \quad -\sin x dx = dx$$

$$\int \cos^۲ x \sin x dx = \int u^۲ \times -du = -\int u^۲ du = -\frac{u^۳}{۳} + c = -\frac{\cos^۳ x}{۳} + c$$

لذا خواهیم داشت:

$$\int \sin^۳ x dx = -\cos x - \left(-\frac{\cos^۳ x}{۳}\right) + c = -\cos x + \frac{\cos^۳ x}{۳} + c$$

مثال ۳۰۷.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \cos^{۳} x dx$$

پاسخ ۳۰۸.۰.۶. مانند مثال قبل $n = ۳$ می‌باشد لذا توان $۲k = ۲$ را جدا نموده و به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\int \cos^{۳} x dx &= \int \cos^{۲} x \cos x dx = \int (۱ - \sin^{۲} x) \cos x dx \\ &= \int \cos x dx - \int \sin^{۲} x \cos x dx = \sin x - \int \sin^{۲} x \cos x dx\end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\sin x = u$ خواهیم داشت:

$$\sin x = u \quad \Longrightarrow \quad \cos x dx = du$$

$$\int \sin^{۲} x \cos x dx = \int u^{۲} du = \frac{u^{۳}}{۳} + c = \frac{\sin^{۳} x}{۳} + c$$

لذا خواهیم داشت:

$$\int \cos^{۳} x dx = \sin x - \frac{\sin^{۳} x}{۳} + c$$

حالت دوم: محاسبه انتگرال‌های $\int \sin^n x dx$ یا $\int \cos^n x dx$ در صورتی که n عدد صحیح زوج باشد.
در این حالت از روابط مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sin^{۲} x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}$$

$$\cos^{۲} x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}$$

مثال ۶.۰.۳۰۹. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin^{۲} x dx$$

پاسخ ۶.۰.۳۱۰.

$$\begin{aligned}\int \sin^{۲} x dx &= \int \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} dx = \int \frac{۱}{۲} dx - \frac{۱}{۲} \int \cos ۲x dx \\ &= \frac{۱}{۲} x - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \sin ۲x + c = \frac{۱}{۲} x - \frac{۱}{۴} \sin ۲x + c\end{aligned}$$

حالت سوم: محاسبه انتگرال $\int \sin^n x \cos^m x dx$ در صورتی که حداقل یکی از توان‌ها فرد باشد.

در این حالت مانند حالت اول عمل می‌کنیم بدین صورت که فقط یکی از توان‌های فرد را (مثلا n) به صورت $n = ۲k + ۱$ نوشته و توان دیگر را تغییر نمی‌دهیم و همانند حالت اول حل می‌کنیم.

حالت چهارم: محاسبه انتگرال $\int \sin^n x \cos^m x dx$ در صورتی که m و n هر دو زوج باشند.

در این حالت برای هر دو تابع از روابط مثلثاتی داده شده در حالت دوم استفاده می‌کنیم.

حالت پنجم: محاسبه انتگرال $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ یا $\int \sin \alpha x . \sin \beta x dx$ یا $\int \cos \alpha x . \cos \beta x dx$ در این حالت از روابط مثلثاتی زیر استفاده می‌نماییم.

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{۱}{۲} (\sin(\alpha - \beta) x + \sin(\alpha + \beta) x)$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{۱}{۲} (\cos(\alpha - \beta) x - \cos(\alpha + \beta) x)$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{۱}{۲} (\cos(\alpha - \beta) x + \cos(\alpha + \beta) x)$$

مثال ۳۱۱.۰.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin ۳x \cos ۲x dx$$

پاسخ ۳۱۲.۰.۶.

$$\begin{aligned}\int \sin ۳x \cos ۲x dx &= \int \frac{۱}{۲} \left(\sin(۳-۲)x + \sin(۳+۲)x\right) dx \\ &= \frac{۱}{۲} \left(\int \sin x dx + \int \sin ۵x dx\right) \\ &= \frac{-۱}{۲} \cos x dx - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۵} \cos ۵x + c\end{aligned}$$

مثال ۳۱۳.۰.۶. مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{(x-۲)(x-۳)}$$

پاسخ ۳۱۴.۰.۶. این کسر گویا است و اعداد ۲ و ۳ ریشه‌های مخرج آن هستند، داریم:

$$\frac{۱}{(x-۲)(x-۳)} = \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{x-۳} = \frac{A(x-۳)+B(x-۲)}{(x-۲)(x-۳)} = \frac{(A+B)x-۳A-۲B}{(x-۲)(x-۳)}$$

چون مخرج دو کسر برابرند باید صورت‌های آن‌ها نیز برابر باشند، پس:

$$۱ = (A+B)x - ۳A - ۲B$$